۱۷

انتشار امواج الکترومغناطیسی تکفام

امواج تخت تکفام در محیط‌های نارسانا

موج تخت به صورت موجی تعریف می‌شود که، در هر لحظه از زمان، فاز آن در تمام نقاط واقع بر هر یک از صفحات عمود بر راستای مشخصی یکسان است. برای مثال چنانچه این راستا، راستای z باشد، آنگاه $\vec{E}$ باید در تمام نقاطی که مقدار z آنها یکسان است، یعنی در تمام نقاط واقع در صفحه‌ای موازی با صفحه xy، فاز یکسانی داشته باشد.

موج تختی با جهت انتشار $\hat{u}$ توسط: $e^{-i(wt-k\hat{u}.\vec{r})}$ توصیف می‌شود. بردار انتشار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{k}=k\hat{u} \qquad (۱-۱۷)$$

و بستگی زمانی و فضایی نمایی موج تخت به صورت زیر است:

$$e^{-i(wt-k.\vec{r})} \qquad (۲-۱۷)$$

سرعت انتشار یک موج تخت تکفام، دقیقاً همان سرعت حرکت صفحات با فاز ثابت است. فاز ثابت بدان معناست که:

$$\vec{k}.\vec{r}-wt=constant \Rightarrow k\xi-wt=constant \qquad (۳-۱۷)$$

k اندازه $\vec{k}$، ξ تصویر $\vec{r}$ در جهت $\vec{k}$ است.

با مشتق‌گیری از رابطه بالا نسبت به زمان، سرعت فاز به‌دست می‌آید:

$$V_P=\frac{d\xi}{dt}=\frac{w}{k}=\frac{c}{n}\ (k=\frac{wn}{c}) \qquad (۴-۱۷)$$

پاسخهای موج عرضی معادلات ماکسول به ساده‌ترین نحو بر حسب امواج تخت بیان می‌شوند:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\hat{E}e^{-i(wt-\vec{k}.\vec{r})}\ ,\vec{B}(\vec{r},t)=\hat{B}e^{-i(wt-\vec{k}.\vec{r})} \qquad (۵-۱۷)$$

این پاسخها مادامی که $\vec{k}.\hat{E}=0$ باشد، برای هر فرکانس w و هر دامنه $\hat{E}$ وجود دارند. اندازه $\vec{k}$ از رابطه پاشندگی عرضی $k=\frac{\sqrt{\mathbf{K}}\,w}{C}$ تعیین می‌شود، هر چند که جهت آن دلخواه است.

در این بحث ما مورد $\mathbf{K}=0$ را به طور صریح کنار گذاشتیم. به علاوه با این فرض ضمنی که $\vec{k}$ حقیقی است، مجموعه‌ای از پاسخهای موج تخت را که در بعضی موارد برای ارضای شرایط مرزی در فصل مشترک بین دو محیط نارسانا لازم است کنار گذاشتیم. اگر $\vec{k}$ حقیقی نباشد، داریم:

$$\vec{k}=\vec{k}_r+i\vec{k}_i \qquad (۶-۱۷)$$

بنابراین رابطه پاشندگی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\vec{k}_r.\vec{k}_r-\vec{k}_i.\vec{k}_i+2i\vec{k}_r.\vec{k}_i=\mathbf{K}\frac{w^2}{C^2} \qquad (۷-۱۷)$$

قسمت موهومی سمت چپ این معادله باید صفر شود و برای آنکه قسمتهای حقیقی برابر شوند، k_r^2 می‌بایست بزرگتر از k_i^2 باشد. قسمت موهومی $\vec{k}$ یعنی k_i، می‌تواند صفر باشد یا می‌تواند بر k_r عمود باشد. مورد اول به طور کامل در بالا مورد بحث قرار گرفت. مورد دوم شامل امواجی می‌شود که برای آنها صفحات فاز ثابت بر صفحات دامنه ثابت عمودند. در هر در مورد $\vec{k}.\vec{k}$ حقیقی است و نتیجاً یک مقدار حقیقی برای اندازه $\vec{k}$ می‌توان تعریف کرد که در معادله $(k=\frac{\sqrt{\mathbf{K}}\,w}{C})$ صدق کند.

چون معادلات ماکسول خطی هستند، ترکیبی خطی از پاسخها (برهم نهی امواج تخت) نیز یک پاسخ است. بنابراین از جمع امواج تخت می‌توانیم پاسخهای دیگری به دست آوریم:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\sum_i \hat{E}(\vec{k}_i,w_i)\exp\left[-i(w_i t-\vec{k}_i.\vec{r})\right] \qquad (۸-۱۷)$$

این برهم نهی امواج تخت به صورت یک سری فوریه (مختلط) است و بنابراین می‌تواند نمایشگر هر پاسخی باشد که تناوبی است (نه الزاماً سینوسی) باشد. برای پاسخی که حتی تناوبی هم نیست، علامت جمع در معادله بالا را می‌توان به علامت انتگرال تبدیل کرد (انتگرال فوریه) که در آن $\hat{E}(\vec{k},w)$ تابع پیوسته‌ای از $w,\vec{k}$ است. تابع $\hat{E}(\vec{k},w)$ تبدیل فوریه $\vec{E}(\vec{r},t)$ نامیده می‌شود. در این حالت باید این امکان را نیز درنظر بگیریم که n به w,k بستگی دارد:

$$n=n(k,w) \qquad (۹-۱۷)$$

این اثر به پاشندگی مشهور است.

PowerEn.ir

قطبش

برای دامنه‌های برداری مختلط $\hat{B},\hat{E}$ دو معنای کاملاً واضح می‌توان مطرح کرد: کمیتی مختلط که قسمتهای حقیقی و موهومی آن بردارهای حقیقی هستند:

$$\hat{E}=\vec{E}_r+i\vec{E}_i \qquad (۱۰-۱۷)$$

یا آنکه برداری که مؤلفه‌های آن (نسبت به بردارهای پایه حقیقی) کمیتهای نرده‌ای مختلطی هستند:

$$\hat{E}=\hat{E}_P\hat{P}+\hat{E}_s\hat{S}+\hat{E}_u\hat{u} \qquad (۱۱-۱۷)$$

کمیتهای $\hat{u},\hat{s},\hat{p}$ در صورت دوم $\hat{E}$ مجموعه راستگردی از بردارهای یکه متعامد حقیقی هستند. با نوشتن صورت اول برحسب مؤلفه‌ها و صورت دوم برحسب قسمتهای حقیقی و موهومی، به آسانی دیده می‌شود که چنانچه تساویهای زیر برقرار باشند، این دو فرمولبندی، معادل خواهند بود:

$$E_{pr}=E_{rp}\ ,\ E_{pi}=E_{ip}\ ,\ E_{sr}=E_{rs}\ ,\ \dots$$

همچنین مناسب‌تر است که مؤلفه‌های مختلط را به جای آنکه برحسب قسمتهای حقیقی و موهومی بنویسیم به صورت قطبی آنها را بیان کنیم. فرض کنید

$$\hat{E}_p=E_p\,e^{i\varphi_p}\ ,\ \hat{E}_s=E_s\,e^{i\varphi_s}$$

با فرض روابط، $\varphi_p-\varphi_s=\varphi,\varphi_s=0$، هیچ‌گونه محدودیتی وارد نمی شود، زیرا انتخاب $\varphi_s=0$ تنها بدان معناست که برای t مبداء خاصی انتخاب کنیم. با این انتخاب داریم:

$$\hat{E}=E_p\,e^{i\varphi}\,\hat{P}+E_s\,\hat{S} \qquad (۸-۱۷)$$

$$\vec{E}(r,t)=E_p\,\hat{P}\,e^{-i(wt-\hat{k}.\vec{r}-\varphi)}+E_s\,\hat{S}\,e^{-i(wt-\vec{k}.\vec{r})} \qquad (۹-۱۷)$$

که قسمت حقیقی آن عبارت است از

$$\vec{E}(\vec{r},t)=E_p\,\hat{p}\cos(wt-\vec{k}.\vec{r}-\varphi)+E_s\,\hat{s}\cos(wt-\vec{k}.\vec{r}) \qquad (۱۰-۱۷)$$

میدان $\vec{E}$ به مؤلفه‌هایی در دو جهت، با دامنه‌های E_s,E_p که می‌توانند هر مقداری را داشته باشند، تجزیه شده‌اند. به علاوه این دو مؤلفه ممکن است با اختلاف فاز φ نسبت به یکدیگر نوسان کنند.

تصویر تفصیلی میدان نوسان کننده $\vec{E}$ را در نقطه‌ای مشخص، مثلاً در $r=0$، بهتر می‌توان دید. ابتدا فرض کنید $\varphi=0$، آنگاه

$$\vec{E}(0,t)=(E_p\,\hat{p}+E_s\,\hat{s})\cos wt \qquad (۱۱-۱۷)$$

میدان $\vec{E}$ متناوباً از مقدار $\sqrt{E_p^2+E_s^2}$ به صفر و از صفر به $-\sqrt{E_p^2-E_s^2}$ کاهش می‌یابد و مجدداً به مقدار اولیه‌اش می‌رسد، و همواره میدان E در امتداد جهت $E_p\,\hat{p}+E_s\,\hat{s}$ قرار دارد، این حالت قطبش خطی نامیده می‌شود.

اگر $E_p=0$ یا $E_s=0$ باشد، بازهم قطبش خطی داریم، ولی در آن صورت φ تعریف نشده است.

برای $\varphi=\pi$:

$$\vec{E}(0,t)=(-E_p\,\hat{P}+E_s\,\hat{S})\cos wt \qquad (۱۲-۱۷)$$

مجدداً قطبش خطی داریم. برای $\varphi=\frac{\pi}{2}$:

$$\vec{E}(0,t)=E_p\,\hat{P}\sin wt+E_s\,\hat{S}\cos wt \qquad (۱۳-۱۷)$$

نوک بردار $\vec{E}$ یک مسیر بیضوی را در جهت ساعتگرد طی می‌کند، این حالت را قطبش بیضوی راستگرد می‌نامند. برای $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ مسیر همان مسیر است ولی به طور عکس ساعتگرد طی می‌شود و قطبش را قطبش بیضوی چپگرد می‌نامند.

در حالت خاص $E_p=E_s,\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ قطبش دایروی (راستگرد یا چپگرد) است. برای سایر مقادیر φ، بازهم قطبش بیضوی خواهیم داشت. (حتی اگر $Ep=E_s$ باشد).

محورهای اصلی و فرعی بیضی با محورهای $\hat{s},\hat{p}$ زاویه می‌سازند. برای قطبش بیضوی اندازه بردار E هرگز صفر نمی‌شود. هرچند که مؤلفه آن در هر یک از جهات مفروض صفر می‌شود.

از معادله (۱۷-۱۰) با نوشتن $\vec{E}(0,t)=\vec{E}$، برای قسمت حقیقی آن داریم:

$$\vec{E}=E_p\,\hat{p}\cos(wt_1-\varphi)+E_s\,\hat{s}\cos wt \qquad (۱۴-۱۷)$$

برای $\vec{B}(0,t)$، یعنی قسمت حقیقی $\hat{B}e^{-iwt}$، با استفاده از رابطه $\hat{B}=\frac{n}{c}\hat{u}\times\hat{E}$ داریم:

$$\vec{B}=(\tfrac{n}{c})\left[E_p\,\hat{s}\cos(wt-\varphi)-E_s\,\hat{p}\cos wt\right] \qquad (۱۵-۱۷)$$

چون ضرب نرده‌ای این دو معادله صفر است، بردارهای حقیقی $\vec{B},\vec{E}$ در هر لحظه بر یکدیگر عمودند. همچنین $R_e\,\hat{E}=\vec{E}(0,0)$ و، $R_e\,\hat{B}=\vec{B}(0,0)$، بنابراین قسمتهای حقیقی $\hat{B},\hat{E}$ برهم عمودند.

چگالی و شار انرژی

با مجذور کردن معادلات (۱۷-۱۴)،(۱۷-۱۵)، داریم:

$$E^2=E_p^2\cos^2(wt-\varphi)+E_s^2\cos^2 wt \qquad (۱۶-۱۷)$$

$$B^2=(\tfrac{n}{c})^2E^2=\varepsilon\mu_0E^2 \qquad (۱۷-۱۷)$$

چون $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ و $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$، می‌بینیم که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در چگالی انرژی سهم یکسانی دارند:

$$\vec{B}.\vec{H}=\vec{D}.\vec{E} \qquad (۱۸-۱۷)$$

$$u=\varepsilon E^2=\frac{1}{\mu_0}(\tfrac{n}{c})^2E^2 \qquad (۱۹-۱۷)$$

به علاوه، $\vec{E}\times\vec{H}=EH\,\hat{u}$، بنابراین بردار پوئین تینگ در راستای جهت انتشار است و اندازه آن برابر است با:

$$S=\frac{1}{\mu_0}\frac{n}{c}E^2 \qquad (۲۰-۱۷)$$

این دو عبارت را می‌توان ترکیب کرد و نتیجه جالبی به‌دست آورد که مستقل از مقدار خاص میدان $\vec{E}$ است:

$$S=\frac{c}{n}u \qquad (۲۱-۱۷)$$

چنانچه سرعت فاز موج تخت را به صورت برداری در جهت انتشار با بزرگی V_p بنویسیم آنگاه:

$$V_P=\frac{c}{n}\Rightarrow\vec{S}=u\vec{V}_P \qquad (۲۲-۱۷)$$

PowerEn.ir

بستگی $\hat{s},\hat{u}$ به زمان توسط E^2 از معادله (۱۷ – ۱۶) تعیین می‌شود

که به قطبش موج بستگی دارد. برای قطبش دایروی $(\varphi=\pm\frac{\pi}{2})$:

$$E^2=E_p^2\sin^2 wt+E_p^2\cos^2 wt=E_p^2 \qquad (۱۷-۲۳)$$

که نسبت به زمان ثابت است، برای قطبش خطی $(\varphi=0,\pi)$

$$E^2=(E_p^2+E_s^2)\cos^2 wt \qquad (۱۷-۲۴)$$

که با فرکانسی دو برابر فرکانس موج بین صفر و بیشینه مقدارش تغییر می‌کند، البته، در همه موارد E^2 همواره مثبت است.

به هر جهت، در فرکانسهای زیاد بستگی به زمان قابل اندازه‌گیری نیست و آنچه بیشتر مورد توجه است میانگین زمانی است. از آنجا که میانگین زمانی $\cos^2(wt-\varphi)$ در یک دوره تناوب برابر $\frac{1}{2}$ است، برای هر قطبشی داریم:

$$\overline{E^2}=\frac{1}{2}(E_p^2+E_s^2) \qquad (۱۷-۲۵)$$

اگر $g=g_0e^{iwt}, f=f_0e^{iwt}$ باشد، که در آن g_0, f_0 به زمان بستگی ندارند هر چند ممکن است به متغیرهای دیگری بستگی داشته باشند، آنگاه:

$$\overline{\mathbf{Re}\,f\,\mathbf{Re}\,g}=\frac{1}{2}\mathbf{Re}\,f^*g \qquad (۱۷-۲۶)$$

خط بالای کمیت سمت چپ به معنای میانگین زمانی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{w}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T w(t)\,dt \qquad (۱۷-۲۷)$$

این قضیه برای حاصل ضرب هر دو کمیت مختلطی که به صورت هماهنگ با فرکانس یکسان به زمان بستگی داشته باشد، ولی لزوماً فاز یکسانی نداشته باشند، صادق است. اگر این کمیتها برداری باشند، این ضرب می‌تواند یا ضرب نرده‌ای باشد یا ضرب برداری. می‌توان به آسانی بررسی کرد که با گذاشتن بردار مختلط $\vec{E}$ در این رابطه خواهیم داشت:

$$\overline{E^2}=\frac{1}{2}\mathbf{Re}(\overrightarrow{E^*}.\vec{E})$$

امواج تخت تکفام در محیطهای رسانا

در یک محیط رسانا تمام نتایج بالا به طور صوری معتبرند و مشروط بر آنکه به جای $\mathbf{K}$ از ثابت دی‌الکتریک مختلط $\hat{\mathbf{K}}$ استفاده شود که

$$\hat{\mathbf{K}}=\mathbf{K}+\frac{ig}{\varepsilon_0 w}=\mathbf{K}_r+i\mathbf{K}_r \qquad (۱۷-۲۸)$$

پیامد این امر آن است که ضریب شکست

$\hat{n}=n+ik$ (کمیتهای حقیقی n,k ثابتهای اپتیکی نام دارند) (۱۷-۲۹)

و بردار انتشار

$$\hat{k}=k_r+ik_i \qquad (۱۷-۳۰)$$

نیز هر دو مختلطاند. در آن صورت $\vec{B},\vec{E}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\hat{E}e^{-\overrightarrow{k_i}.\vec{r}}\,e^{-i(wt-\overrightarrow{k_r}.\vec{r})}$$
$$\vec{B}(\vec{r},t)=\hat{B}e^{-\overrightarrow{k_i}.\vec{r}}\,e^{-i(wt-\overrightarrow{k_r}.\vec{r})} \qquad (۱۷-۳۱)$$

این پاسخ نشانگر موج تختی است که با طول موج $\lambda=\frac{2\pi}{k_r}$ در جهت k_r انتشار می‌یابد. ولی دامنه آن به جای آنکه ثابت باشد، کاهش می‌یابد و بیشترین کاهش آن در جهت k_i است. سطوح فاز ثابت صفحاتی هستند عمود بر جهت انتشار k_r. همچنین سطوح دامنه ثابتی وجود دارند که صفحاتی هستند عمود بر k_i.

برای محیط رابطه پاشندگی عبارت است از:

$$\hat{k}=\frac{\hat{n}w}{C} \qquad (۱۷-۳۲)$$

که در آن کمیت نرده‌ای $\hat{k}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{k}=\sqrt{\hat{k}.\hat{k}}=\sqrt{k_r^2-k_i^2+2i\overrightarrow{k_r}.\overrightarrow{k_i}} \qquad (۱۷-۳۳)$$

ابتدا فرض کنیم k_r و k_i جهت یکسانی دارند. مثلاً در موردی که موج از خارج عمود بر یک مرز تخت وارد محیط رسانا می‌شود. در آن صورت می‌توانیم بنویسیم:

$$\vec{\hat{k}}=(k_r+ik_i)\hat{u}=\hat{k}\hat{u} \qquad (۱۷-۳۴)$$

که در آن $\hat{u}$ برداریکه حقیقی در جهت مشترک k_r و k_i است. چون $\hat{u}$ حقیقی است، معادلات زیر

$$\hat{u}.\vec{\hat{E}}=0=\hat{u}.\vec{\hat{B}} \qquad (۱۷-۳۵)$$

بازهم بدان معناست که بردارهای B,E بر جهت انتشار $\hat{u}$ عمودند. ولی، معادله $\vec{\hat{B}}=\frac{n}{c}\hat{u}\times\vec{\hat{E}}$ تبدیل می‌شود به:

$$\vec{\hat{B}}=\frac{\hat{n}^2}{c}\hat{u}\times\vec{\hat{E}} \qquad (۱۷-۳۶)$$

در اینجا $\hat{n}$ مختلط بدین معناست که $\vec{B},\vec{E}$ با یکدیگر هم‌فاز نیستند، و همچنین بدین معناست که بردارهای B,Eی حقیقی بر یکدیگر عمود نیستند مگر برای حالت قطبش خطی. برحسب ضریب شکست مختلط، $\hat{n}=n+ik$، روابط زیر را داریم:

$$k_r=\frac{nw}{c},\ k_i=\frac{kw}{c} \qquad (۱۷-۳۷)$$

با نوشتن $\vec{u}.\vec{r}=\xi$، در این حالت خاص عبارت زیر را برای میدان E به دست می‌آوریم:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{\hat{E}}e^{-kw\frac{\xi}{c}}e^{-iw(t-n\frac{\xi}{c})} \qquad (۱۷-۳۸)$$

موج با سرعت فاز $(\frac{c}{n})$ و ثابت تضعیف $\frac{kw}{c}$ انتشار می‌یابد. کمیت اخیر تعیین می‌کند که دامنه نوسان کننده میدان با چه سرعتی نسبت به فاصله افت می‌کند. معکوس ثابت تضعیف:

$$\delta=\frac{c}{kw} \qquad (۱۷-۳۹)$$

که عمق پوسته نامیده می‌شود، اندازه فاصله‌ای را به‌دست می‌دهد که در آن دامنه میدان به $\frac{1}{e}$ مقدارش در هر نقطه مفروض (مثلاً، در سطحی که موج وارد محیط می‌شود) افت می‌کند.

PowerEn.ir

برای محیط نارسانا ($k=0$) عمق پوسته بینهایت است. از آنجا که طول موج در محیط $\lambda=\frac{2\pi c}{nw}$، عمق پوسته را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\delta=\frac{n}{k}\frac{\lambda}{2\pi} \qquad (۴۰-۱۷)$$

در ماده‌ای که در آن اندازه k با اندازه n قابل قیاس است، «موج» در فاصله یک طول موج تضعیف می‌شود، ولی اگر $k<<n$ باشد، مثلاً در یک دی‌الکتریک ناکامل که رسانندگی مختصری دارد، موج بدون تضعیف قابل ملاحظه‌ای چندین طول موج انتشار می‌یابد. در این حالت ماده شفاف است.

از آنجا که انتشار موج را ثابتهای اپتیکی k,n تعیین می‌کنند، مهم است که رابطه آنها را با کمیتهای $\mathbf{K}$ و g، که خواص ماده در اصل برحسب آن بیان شده بودند، به‌دست آوریم. تعاریف $\hat{k},\hat{n}$ از طریق معادله زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند.

$$\begin{cases}\hat{n}=n+ik\\ \hat{\mathbf{K}}=\mathbf{K}+i\dfrac{g}{\varepsilon_0 w}\end{cases},\quad \hat{\mathbf{K}}=\hat{n}^2 \qquad (۴۱-۱۷)$$

$\hat{\mathbf{K}}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{\mathbf{K}}=\mathbf{K}_r+i\mathbf{K}_i \qquad (۴۲-۱۷)$$

با مجذور کردن $(n+ik)$ و مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی در معادله (۱۷-۴۱) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}\mathbf{K}_r=n^2-k^2\\ \mathbf{K}_i=2nk\end{cases}\Rightarrow \quad n=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\mathbf{K}_r+\sqrt{\mathbf{K}_r^2+\mathbf{K}_i^2}\right]} \qquad (۴۳-۱۷)$$

$$k=\sqrt{\frac{1}{2}\left[-\mathbf{K}_r+\sqrt{\mathbf{K}_r^2+\mathbf{K}_i^2}\right]} \qquad (۴۴-۱۷)$$

معادلات بالا دقیق اما پیچیده‌اند، بنابراین بهتر است بعضی موارد تقریبی را بررسی کنیم. غالباً یکی از چند تقریب زیر معتبر است:

۱- $\mathbf{K}_i<<|\mathbf{K}_r|\ ,\ \mathbf{K}_r>0 \quad (w>>\frac{g}{\varepsilon})$

$$n\approx\sqrt{\mathbf{K}_r}\ ,\ k=\frac{\mathbf{K}_i}{2n}<<n$$

۲- $\mathbf{K}_i<<|\mathbf{K}_r|\ ,\ \mathbf{K}_r<0\ (w>>\frac{g}{-\varepsilon})$

$$k\approx\sqrt{-\mathbf{K}_r}\ ,\ n=\frac{\mathbf{K}_i}{2k}<<k$$

۳- $\mathbf{K}_i>>|\mathbf{K}_r| \quad (w<<\frac{g}{|\varepsilon|})$

$$n\approx k\approx\sqrt{\frac{\mathbf{K}_i}{2}} \qquad (۴۵-۱۷)$$

ی مثال، تقریب (۱) برای یک عایق خوب، تا حد فرکانسهای خیلی . اساساً تا حد dc (دقیقاً تا حد dc تنها برای عایق کامل با $g=0$)، بر است و نتیجه $n=\sqrt{\mathbf{K}}$ را مشابه محیط نارسانا به‌دست می‌دهد. یب (۲) برای فلزات در قسمت بالایی فروسرخ طیف فرکانس ر است. در صورتی که تقریب (۳) برای فلزات در فرکانسهای رموج و پایین‌تر معتبر است. فرکانسی که حد فاصل بین تقریبهای (۲)، (۳) است عبارت است از $w\approx\frac{1}{\tau}$ که در آن τ زمان برخورد الکترونهای آزاد است.

در مسائل الکتریکی که در آنها عمق پوسته مهم است، معمولاً تقریب (۳) معتبر است. برحسب فاصله مطلق، معادله ( ) در مورد تقریب (۳) تبدیل می‌شود به

$$\delta\approx\frac{c}{w}\sqrt{\frac{2}{\mathbf{K}_i}}=\sqrt{\frac{2}{\mu_0 w g}} \qquad (۴۶-۱۷)$$

هنگامی که w به سمت صفر میل می‌کند δ بینهایت می‌شود، که این مطلب سازگار است با نتیجه قبلی ما مبنی بر آنکه میدان E و چگالی جریان در یک رسانا (ولی نه در یک ابر رسانا) برای جریانهای مستقیم و همچنین عملاً برای جریان متناوب ۵۰ هرتزی، یکنواخت هستند.

مسائل فصل هفدهم

۱۷ - ۱ - اگر $F(r)=Ae^{ik.r}$ باشد که در آن A ثابت است، نشان دهید

$$\nabla.F=ik.F\ ,\ \nabla\times F=ik\times F$$

حل:

$$\vec{F}(r)=\vec{A}e^{i\vec{k}.\vec{r}}\ ,A=Cte\Rightarrow\vec{\nabla}.\vec{F}=i\vec{k}.\vec{F}$$

$$,\vec{\nabla}\times\vec{F}=i\vec{k}\times\vec{F}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A}e^{i\vec{k}.\vec{r}}=\vec{\nabla}.\vec{A}e^{i\vec{k}.\vec{r}}+\vec{\nabla}e^{i\vec{k}.\vec{r}}.\underline{\vec{A}(A=Cte)}0+\vec{A}.\vec{\nabla}e^{i\vec{k}.\vec{r}}$$

$$=\vec{A}.i\vec{k}e^{i\vec{k}.\vec{r}}=\vec{A}e^{i\vec{k}.\vec{r}}.(i\vec{k})=\vec{F}.i\vec{k}=i\vec{k}.\vec{F}$$

$$\vec{\nabla}e^{i\vec{k}.\vec{r}}=(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k})e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)}$$

$$=\left[(ik_x)\hat{i}+(ik_y)\hat{j}+(ik_z)\hat{k}\right]e^{i(\vec{k}.\vec{r})}=i\vec{k}e^{i\vec{k}.\vec{r}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}e^{i\vec{k}.\vec{r}}=e^{i\vec{k}.\vec{r}}\vec{\nabla}\times\vec{A}+\vec{\nabla}e^{i\vec{k}.\vec{r}}\times A\underline{(A=Cte)}0$$

$$+i\vec{k}e^{i\vec{k}.\vec{r}}\times\vec{A}=i\vec{k}\times\vec{A}e^{i\vec{k}.\vec{r}}=i\vec{k}\times\vec{F}$$

۱۷ - ۲ - نشان دهید برای موج تخت در خلأ داریم

$$\frac{E}{H}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=377\Omega$$

این مقاومت را مقاومت ظاهری خلأ می‌نامند.

حل: معادلات ماکسول برای موج تخت، $\vec{E}=\hat{E}e^{-i(wt-\vec{k}.\vec{r})}$ در یک دی الکتریک بدون بار و جریان برابر است با:

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=0\Rightarrow i\vec{k}.\vec{B}=0\Rightarrow\vec{k}.\hat{B}=0 \qquad (B \text{ بر جهت انتشار عمود است})$$

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=0\Rightarrow\varepsilon i\vec{k}.\vec{E}=0\Rightarrow\mathbf{K}\vec{k}.\hat{E}=0\ ,\ \mathbf{K}\neq0\Rightarrow\vec{k}.\hat{E}=0$$

(E بر جهت انتشار عمود است)

PowerEn.ir

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow i\vec{k}\times\vec{E}=iw\vec{B}\Rightarrow \vec{k}\times\hat{E}=w\hat{B} \qquad (۱)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\Rightarrow \frac{i\vec{k}}{\mu_\circ}\times\vec{B}=-\varepsilon i w\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{k}\times\vec{B}=-\mathbf{K}\varepsilon_\circ\mu_\circ w\hat{E}=\frac{-\mathbf{K}w}{C^۲}\hat{E} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow \vec{k}\times(\vec{k}\times\hat{E})=\frac{-\mathbf{K}w^۲}{C^۲}\hat{E}\,(backCab)$$

$$\vec{k}(\vec{k}.\hat{E})-k^۲\hat{E}=\frac{-\mathbf{K}w^۲}{C^۲}\hat{E}$$

(اندازه بردار موج)

$$\Rightarrow \circ-k^۲\hat{E}=\frac{-\mathbf{K}w^۲}{C^۲}\hat{E}\Rightarrow k=\sqrt{\mathbf{K}}\frac{w}{c}=n\frac{w}{c}*$$

$$\rho,J=\circ:\vec{k}\times\vec{E}=k\hat{u}\times\hat{E}=k\left|\hat{E}\right|Sin۹\circ=w\left|\hat{B}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\hat{E}\right|=\frac{w}{k}\left|\hat{B}\right|\overset{*}{=}\frac{c}{n}\left|\hat{B}\right|\Rightarrow |E|=\frac{c}{n}|B|$$

$$\frac{E}{H}=\frac{\frac{c}{n}|B|}{\frac{۱}{\mu_\circ}|B|}=\frac{c\mu_\circ}{n}=\frac{\mu_\circ}{\sqrt{\mu_\circ\varepsilon_\circ}}$$

(مقاومت ظاهری خلاء)

$$=\sqrt{\frac{\mu_\circ}{\varepsilon_\circ}}=۳۷۷(\Omega)$$

برای خلاء، $(n=۱)$ است و مقادیر $\varepsilon_\circ,\mu_\circ$ به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$\varepsilon_\circ=۸/۸۵۴\times۱۰^{-۱۲}\ ,\ \mu_\circ=۴\pi\times۱۰^{-۷}$$

۱۷ - ۳ - دو موج تخت k,w و دامنه Eی یکسانی دارند ولی قطبش دایره‌ای آنها عکس یکدیگر است (چپ و راست). نشان دهید که از برهم‌نهی این دو موج، موجی با قطبش خطی و دامنه $۲E$ به دست می‌آید.

حل:

$$\overrightarrow{E_۱}=\hat{E}e^{i(wt-\vec{k}.\vec{r})},\overrightarrow{E_۲}=\hat{E}e^{-i(wt-\vec{k}.\vec{r})}\begin{cases}w_۱=w_۲=w\\ \overrightarrow{k_۱}=\overrightarrow{k_۲}=\vec{k}\\ \hat{E}_۱=\hat{E}_۲=\hat{E}\end{cases}$$

$$\hat{E}=(E_p\hat{P}e^{i\varphi}+E_s\hat{s})$$

(راستگرد و چپگرد) $E_p=E_s\ ,\ \varphi=\pm\frac{\pi}{۲}$: قطبش دایره‌ای

بنابراین:

$$\vec{E}_۱=E_p(e^{\frac{i\pi}{۲}}\hat{P}+\hat{s})e^{-i(wt-\vec{k}.\vec{r})},$$

$$\vec{E}_۲=E_p(e^{-\frac{i\pi}{۲}}\hat{P}+\hat{s})e^{-i(wt-\vec{k}.\vec{r})}$$

$$\overrightarrow{E_۱}+\overrightarrow{E_۲}=E_P e^{-i(wt-\vec{k}.\vec{r})}\left[(e^{\frac{i\pi}{۲}}+e^{-\frac{i\pi}{۲}})\hat{p}+۲\hat{s}\right]$$

$$=E_p e^{-i(wt-\vec{k}.\vec{r})}\left[(۲\cos\frac{\pi}{۲})\hat{p}+۲\hat{s}\right]=۲E_p\hat{s}e^{-i(wt-\vec{k}.\vec{r})}$$

نکته: $\vec{k},w$ و دامنه $\hat{E}$ دو موج تخت مفروض یکسان هستند ولی قطبش دایره ای آنها عکس یکدیگر است (چپگرد و راستگرد) از برهمنهی این دو موج، موجی با قطبش خطی و دامنه $۲\hat{E}$ حاصل می‌شود.

۱۷ - ۴ - به ازای $E_s=۲E_p$ با $\phi=۳۰^\circ$ و با $\phi=۶۰^\circ$ شکلی مانند شکل ۱۷-۱ رسم کنید.

حل:

فرض: $E_s=۲E_p\ \ ,\varphi=۳۰^\circ,۶۰^\circ$

در نقطه خاص $r=\circ$، تغییرات زمانی E را پیدا می‌کنیم:

انتهای بردار E در نقطه $r=\circ$ به صورت تابعی از زمان:

$$\vec{E}=E_p\hat{P}\cos(wt-\vec{k}.\vec{r}-\varphi)+E_s\hat{s}\cos(wt-\vec{k}.\vec{r})$$

$$=E_p\hat{P}\cos(wt-\varphi)+۲E_p\hat{s}\cos(wt)$$

$$\varphi=۳۰^\circ:\vec{E}=E_P\hat{P}\cos(wt-\frac{\pi}{۶})+۲E_p\hat{s}\cos(wt)$$

$$if\ wt=\circ\Rightarrow t=\circ\Rightarrow\vec{E}=E_P\hat{P}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})+۲E_P\hat{s}$$

$$if\ wt=\varphi\Rightarrow t=\frac{\pi}{۶w}\Rightarrow\vec{E}=E_P\hat{P}+۲E_P\hat{s}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

$$if\ wt=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow t=\frac{\pi}{۲w}\Rightarrow\vec{E}=E_P\hat{P}\cos\frac{\pi}{۳}+\circ=\frac{۱}{۲}E_P\hat{P}$$

$$if\ wt=۲\varphi\Rightarrow t=\frac{\pi}{۳w}\Rightarrow\vec{E}=E_P\hat{P}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})+E_P\hat{s},\ldots$$

۱۷ - ۵ - زمین تقریباً $۱۳۰۰W/m^۲$ انرژی تابشی از خورشید دریافت می‌کند. با فرض آنکه این انرژی به صورت موج تکفامی با قطبش تخت باشد و با فرض فرود عمودی، اندازه بردارهای میدان الکتریکی و مغناطیسی خورشید را محاسبه کنید.

حل:

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}\ \Rightarrow\ \left|\vec{S}\right|=EH\ ,\ B=\frac{E}{C}\Rightarrow S=E(\frac{E}{\mu_\circ C})$$

$$\Rightarrow\ E=\sqrt{\mu_\circ CS}=(۴\pi\times۱۰^{-۷}\times۳\times۱۰^{۸}\times۱۳۰۰)^{\frac{۱}{۲}}\approx۷۰۰(\frac{V}{m})$$

$$B=\frac{E}{C}\approx۲/۳۳\times۱۰^{-۶}(T)$$

۱۷ - ۶ - فرض کنید A و B بردارهای مختلطی هستند. (الف) کمیت $\mathbf{Re}A.\mathbf{Re}B$ را محاسبه و با $\mathbf{Re}(A.B)$ مقایسه کنید. (ب) نشان دهید که $A.B$ ایجاب نمی‌کند که $RE\,A.\mathbf{Re}B=\circ$ باشد.

حل: A,B بردارهای مختلط هستند، آنها را به صورت قطبی نمایش می‌دهیم:

$$\vec{A}=\vec{A}_\circ e^{i\varphi_A}\ ,\vec{B}=\vec{B}_\circ e^{i\varphi_B}$$

$$\mathbf{Re}\vec{A}=\vec{A}_\circ\cos\varphi_A\ \ ,\mathbf{Re}\vec{B}=\vec{B}_\circ\cos\varphi_B$$

$$\mathbf{Re}\vec{A}.\mathbf{Re}\vec{B}=\vec{A}_\circ.\vec{B}_\circ\cos\varphi_A\cos\varphi_B \qquad (۱)$$

$$\vec{A}.\vec{B}=e^{i\varphi_A}e^{i\varphi_B}\vec{A}_\circ.\vec{B}_\circ=e^{i(\varphi_A+\varphi_B)}\vec{A}_\circ.\vec{B}_\circ$$

$$\mathbf{Re}(\vec{A}.\vec{B})=\cos(\varphi_A+\varphi_B)\vec{A}_\circ.\vec{B}_\circ \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow\mathbf{Re}(\vec{A}.\vec{B})\neq\mathbf{Re}\vec{A}.\mathbf{Re}\vec{B}$$

چون برابر نیستند، بنابراین صفر بودن یک طرف الزامی به صفر بودن طرف دیگر ندارد.

PowerEn.ir

۱۷ - ۷ - دو موج تخت را در خلأ در نظر بگیرید که k, w، و جهت قطبش pی یکسانی دارند ولی دامنه‌ها و فازهای آنها متفاوت است: E_1، ۰ و E_2, ϕ. میانگین زمانی بردار پوئین‌تینگ S مربوط به برهم‌نهی این دو موج را محاسبه کنید. به اثر تداخل ناشی از اختلاف فاز ϕ توجه کنید. چنانچه جهت‌های قطبش دو موج بر یکدیگر عمود بود، این اثر رخ نمی‌داد.

حل:

$$\vec{E} = \hat{E} e^{-i(wt - \vec{k}.\vec{r})} \quad , \hat{E} = E_P \hat{p} e^{i\varphi} + E_s \hat{s}$$

طبق فرض مسئله: $w_1 = w_2 = w \quad , \vec{k}_1 = \vec{k}_2 = \vec{k}$

$$p \text{ قطبش}: \begin{cases} \hat{E}_1 = E_{p_1} \hat{p} e^{i\varphi_1} = E_1 \hat{p} e^{i(0)} \\ \hat{E}_2 = E_{p_2} \hat{p} e^{i\varphi_2} = E_2 \hat{p} e^{i(0)} \end{cases}$$

و برای سادگی کار میدان را در نقطه $r = 0$ بررسی می‌کنیم:

$$\vec{E}_1 = E_1 \hat{p} e^{-iwt} \quad , \vec{E}_2 = E_2 \hat{p} e^{-i(wt-\varphi)}$$

$$\vec{E}_1(0,t) = E_1 \hat{p} e^{-iwt} \xrightarrow{\text{Re}} \vec{E}_1(0,t) = E_1 \hat{p} \cos(wt)$$

$$\vec{E}_2(0,t) = E_2 \hat{p} e^{-i(wt-\varphi)} \xrightarrow{\text{Re}} \vec{E}_2(0,t) = E_2 \hat{p} \cos(wt-\varphi)$$

$$\vec{E}(0,t) = \vec{E}_1(0,t) + \vec{E}_2(0,t) = E_1 \hat{p} \cos wt + E_2 \hat{p} \cos(wt-\varphi)$$

$$= \left[E_1 \cos wt + E_2 \cos(wt-\varphi)\right] \hat{p}$$

بردار پوئین تینگ: جهت آن جهت انتشار موج الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد و اندازه آن شار موج الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = EH\hat{u}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow i\vec{k} \times \hat{E} = iw\hat{B} \Rightarrow \vec{k} \times \hat{E} = w\hat{B} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow i\vec{k} \times \vec{B} = -iw\mu_0 \varepsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{k} \times \hat{B}$$

$$= -w\mu_0 \mathbf{K} \varepsilon_0 \hat{E} \Rightarrow \vec{k} \times \hat{B} = \frac{-w\mathbf{K}}{c^2} \hat{E}$$

$$\xrightarrow{(1)} \vec{k} \times \vec{k} \times \hat{E} = \frac{-w^2 \mathbf{K}}{c^2} \hat{E} \Rightarrow \vec{k}(\vec{k}.\vec{E}) - k^2 \hat{E} = \frac{-w^2 \mathbf{K}}{C^2} \hat{E}$$

$$\Rightarrow 0 - k^2 \hat{E} = \frac{-w^2 \mathbf{K}}{c^2} \hat{E} \Rightarrow k = \sqrt{\mathbf{K}} \frac{w}{c} \Rightarrow k = \frac{nw}{c} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \vec{k} \times \hat{E} = w\hat{B} \Rightarrow k\hat{u} \times \hat{E} = w\hat{B} \Rightarrow k\left|\hat{E}\right| = w\left|\hat{B}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\hat{B}\right| = \frac{k}{w}\left|\hat{E}\right| \xrightarrow{k=\frac{nw}{c}} \left|\hat{B}\right| = \frac{n}{c}\left|\hat{E}\right| \Rightarrow \left|\vec{B}\right| = \frac{n}{c}\left|\vec{E}\right|$$

بنابراین:

$$\left|\vec{S}\right| = \left|\vec{E}\right|\left|\vec{H}\right| Sin 90 = \frac{E}{\mu_0} B = \frac{1}{\mu_0} \frac{E^2}{C} \qquad (n = 1 : \text{خلاء})$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \frac{E^2}{C} \hat{u}$$

$$E^2 = \left[E_1 \cos wt + E_2 \cos(wt-\varphi)\right]^2 = E_1^2 \cos^2 wt$$

$$+ E_2^2 \cos^2(wt-\varphi) + 2E_1 E_2 \cos wt \cos(wt-\varphi)$$

$$\overline{S} = \langle S \rangle_t = \frac{1}{\mu_0 c} \overline{E^2} = \frac{1}{\mu_0 c} \left[E_1^2 \langle \cos^2 wt \rangle \right.$$

$$\left. + E_2^2 \langle \cos^2(wt-\varphi) \rangle + 2E_1 E_2 \langle \cos wt \cos(wt-\varphi) \rangle \right]$$

$$\langle \cos^2 wt \rangle = \frac{\int_0^T \cos^2 wt\, dt}{T} = \frac{\int_0^T \frac{1+\cos 2wt}{2} dt}{T} = \frac{(\frac{T}{2})}{T} = \frac{1}{2}$$

$$\langle \cos^2(wt-\varphi) \rangle = \frac{\int_0^T \cos^2(wt-\varphi)\, dt}{T}$$

$$= \frac{\int_0^T \frac{1+\cos 2(wt-\varphi)}{2} dt}{T} = \frac{(\frac{T}{2})}{T} = \frac{1}{2}$$

$$\langle \cos wt \cos(wt-\varphi) \rangle$$

$$= \langle \cos wt (\cos wt \cos\varphi - \sin wt \sin\varphi) \rangle$$

$$= \langle \cos^2 wt \cos\varphi - \cos wt \sin wt \sin\varphi \rangle$$

$$= \langle \cos^2 wt \rangle \cos\varphi - \langle \cos wt \sin wt \rangle \sin\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\cos\varphi - 0 = \frac{\cos\varphi}{2}$$

بنابراین:

$$\overline{S} = \frac{1}{\mu_0 c}\left[\frac{E_1^2}{2} + \frac{E_2^2}{2} + E_1 E_2\right] = \frac{1}{2\mu_0 c}\left[E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2\right]$$

۱۷ - ۸ - یک موج ایستا را در خلأ در نظر بگیرید که از برهم‌نهی دو موج با فرکانس، دامنه، و قطبش خطی یکسان، ولی با جهت انتشار kی مخالف تشکیل شده است. (الف) بردار پوئین‌تینگ $S(r,t)$ دو موج برهم نهاده را محاسبه کنید. (توجه کنید که مبدأ دلخواه نیست.)(ب) مقدار $\overline{S}$ چقدر است؟

حل:

$$w_1 = w_2 = w \quad , \hat{E}_1 = \hat{E}_2 = \hat{E} \qquad \begin{cases} \vec{k}_1 = \vec{k} \\ \vec{k}_2 = -\vec{k} \end{cases}$$

قطبش خطی یکسان، بنابراین برای سادگی قطبش را در جهت p می‌گیریم:

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = E\hat{p}\cos(wt - \vec{k}.\vec{r}) \quad , E_2(\vec{r},t) = E\hat{p}\cos(wt + \vec{k}.\vec{r})$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E\hat{p}\cos(wt - \vec{k}.\vec{r}) + E\hat{p}\cos(wt + \vec{k}.\vec{r})$$

$$= E\hat{p}\left[\cos wt \cos(\vec{k}.\vec{r}) + \sin wt \sin(\vec{k}.\vec{r})\right]$$

$$+ E\hat{p}\left[\cos wt \cos(\vec{k}.\vec{r}) - \sin wt \sin(\vec{k}.\vec{r})\right]$$

$$= 2E\hat{p}\cos wt \cos(\vec{k}.\vec{r})$$

بردار پوئین تینگ: جهت آن در جهت انتشار موج الکترومغناطیسی و مقدار آن برابر با شار موج الکترومغناطیسی است.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = EH\hat{u}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow i\vec{k} \times \vec{E} = iw\vec{B} \Rightarrow \vec{k} \times \hat{E} = w\hat{B} \Rightarrow k\hat{u} \times \hat{E} = w\hat{B}$$

$$\Rightarrow k\left|\hat{E}\right| = w\left|\hat{B}\right| \Rightarrow \left|\hat{B}\right| = \frac{k}{w}\left|\hat{E}\right| \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow i\vec{k} \times \vec{H} = -iw\varepsilon\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{k} \times \hat{B} = -w\mathbf{K}\varepsilon_0\mu_0\hat{E} = \frac{-w\mathbf{K}}{c^2}\hat{E}$$

$$\Rightarrow \vec{k} \times (\vec{k} \times \hat{E}) = \frac{-w\mathbf{K}}{c^2}\hat{E} \Rightarrow \vec{k}(\vec{k}.\hat{E}) - k^2\hat{E} = \frac{-w^2\mathbf{K}}{c^2}\hat{E}$$

PowerEn.ir

$$\Rightarrow \circ -k^{2}\hat{E}=\frac{-w^{2}\mathbf{K}}{c^{2}}E \Rightarrow k=\sqrt{\mathbf{K}}\,\frac{w}{c}=\frac{nw}{c} \qquad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow \left|\hat{B}\right|=\frac{n}{c}\left|\hat{E}\right|$$

بنابراین:

$$\left.\begin{aligned}&\vec{S}=\frac{E}{\mu_\circ}B\,\hat{u}=\frac{E}{\mu_\circ}(\frac{n}{c}E)\,\hat{u}=\frac{1}{\mu_\circ c}E^{2}\,\hat{u}\\&E^{2}=4E^{2}\cos^{2}wt\cos^{2}(\vec{k}.\vec{r})\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \vec{S}=\frac{1}{\mu_\circ c}(4E^{2}\cos^{2}wt\cos^{2}(\vec{k}.\vec{r}))\,\hat{u}$$

$$\overline{S}=<S>=\frac{4E^{2}}{\mu_\circ c}<\cos^{2}wt>\cos^{2}(\vec{k}.\vec{r})=\frac{2E^{2}}{\mu_\circ c}\cos^{2}(\vec{k}.\vec{r})$$

۱۷ - ۹ - برا موجی تخت در محیطی رسانا، داریم

$$B=\frac{\hat{n}}{c}u\times E$$

فرض کنید E قطبش بیضوی دارد و $E=E_p e^{i\phi}\,p+E_s\,s$. ثابت کنید

در هر لحظه از زمان

$$\mathbf{Re}\,E.\mathbf{Re}\,B=-\frac{k}{c}E_p\,E_s\sin\phi$$

حل: چشمه بار و جریان نداریم ولی محیط رسانا، $g\neq\circ$، بنابراین یک جریان القایی پاسخ محیط به میدان الکتریکی وجود دارد ($\vec{J}=g\vec{E}$).

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{J}=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+g\vec{E}$$

$$i\vec{k}\times\vec{B}=-\varepsilon\,\mu_\circ i\,w\vec{E}+\mu_\circ\,g\vec{E}$$

$$\Rightarrow\ \vec{k}\times\hat{B}=-\,\mu_\circ\varepsilon_\circ w\left[\mathbf{K}+\frac{ig}{w\varepsilon_\circ}\right]\hat{E}=\frac{-w}{c^{2}}\hat{\mathbf{K}}\hat{E} \qquad (1)$$

در واقع در محیط رسانا $\mathbf{K}$ یک کمیت مختلط است:

$$\hat{\mathbf{K}}=\mathbf{K}_r+i\mathbf{K}_i\ \ ,\ \mathbf{K}_r=\mathbf{K}\ \ ,\ \ \mathbf{K}_i=\frac{g}{w\varepsilon_\circ}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ \Rightarrow\ i\vec{k}\times\hat{E}=iw\hat{B}\ \Rightarrow\ \vec{k}\times\hat{E}=w\hat{B} \qquad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow \vec{k}\times\hat{B}=\vec{k}\times(\vec{k}\times\hat{E})=\frac{-w}{c^{2}}\hat{\mathbf{K}}\hat{E}$$

$$\Rightarrow \vec{k}(\vec{k}.\hat{E})-k^{2}\hat{E}=\frac{-w^{2}}{c^{2}}\hat{\mathbf{K}}\hat{E}\ \Rightarrow\ \left|\vec{k}\right|=\frac{w\hat{n}}{c}\ \Rightarrow\ (\vec{k}\text{ مختلط است})$$

$$(2)\Rightarrow \vec{k}\times\hat{E}=w\hat{B}\Rightarrow\hat{k}\ \hat{u}\times\hat{E}=w\hat{B}\Rightarrow\frac{\hat{n}}{c}\hat{u}\times\hat{E}=\hat{B}\ *$$

$$\vec{E}=(E_p\,\hat{p}e^{i\varphi}+E_s\,\hat{s})e^{-i(wt-\hat{k}.\vec{r})}$$

$$\vec{E}=E_p\,\hat{p}e^{i(\varphi-wt-\hat{k}.\vec{r})}+E_s\,\hat{s}e^{-i(wt-\hat{k}.\vec{r})}$$

$$*:\hat{B}=\frac{\hat{n}}{c}\,\hat{u}\times\hat{E}$$

$$\Rightarrow \vec{B}=\frac{\hat{n}}{c}\left[E_p\,\hat{s}e^{i(\varphi-wt-\hat{k}.\vec{r})}-E_s\,\hat{p}e^{-i(wt-\hat{k}.\vec{r})}\right]$$

$$\vec{B}=\frac{n+ik}{c}\left[E_p\,\hat{s}(\cos(\varphi-wt-\hat{k}.\vec{r})+i\sin(\varphi-wt-\hat{k}.\vec{r}))\right.$$

$$\left.-E_s\,\hat{p}(\cos(wt-\hat{k}.\vec{r})-i\sin(wt-\hat{k}.\vec{r}))\right]$$

$$\mathbf{Re}\,\vec{B}=\frac{n}{c}E_p\,\hat{s}\cos(\varphi-wt-\hat{k}.\vec{r})-\hat{p}\frac{n}{c}E_s\cos(wt-\hat{k}.\vec{r})$$

$$-\frac{\kappa}{c}E_p\,\hat{s}\sin(\varphi-wt-\hat{k}.\vec{r})-\frac{\kappa}{c}E_s\,\hat{p}\sin(wt-\hat{k}.\vec{r})$$

$$\mathbf{Re}\,\vec{E}=E_p\,\hat{p}\cos(\varphi-wt-\hat{k}.\vec{r})+E_s\,\hat{s}\cos(wt-\hat{k}.\vec{r})$$

$$\mathbf{Re}\,\vec{E}.\mathbf{Re}\,\vec{B}=\left[\frac{n}{c}E_p\cos(\varphi-wt-\hat{k}.\vec{r})\right.$$

$$\left.-\frac{\kappa}{c}E_p\sin(\varphi-wt-\hat{k}.\vec{r})\right]E_s$$

$$\cos(wt-\hat{k}.\vec{r})+\left[-\frac{n}{c}E_s\cos(wt-\hat{k}.\vec{r})\right.$$

$$\left.-\frac{\kappa}{c}E_s\sin(wt-\hat{k}.\vec{r})\right]E_p$$

$$\cos(\varphi-wt-\hat{k}.\vec{r})=\frac{n}{c}E_p\,E_s\cos(\varphi-wt-\hat{k}.\vec{r})\cos(wt-\hat{k}.\vec{r})$$

$$-\frac{\kappa}{c}E_pE_s\sin(\varphi-wt-\hat{k}.\vec{r})$$

$$\cos(wt-\hat{k}.\vec{r})$$

$$=\frac{n}{c}E_sE_p\cos(wt-\hat{k}.\vec{r})\cos(\varphi-wt-\hat{k}.\vec{r})-\frac{\kappa}{c}E_pE_s$$

$$\sin(wt-\hat{k}.\vec{r})\cos(\varphi-wt-\hat{k}.\vec{r})$$

$$=-\frac{\kappa}{c}E_p\,E_s\left[\sin\varphi\cos^{2}(wt-\hat{k}.\vec{r})\right.$$

$$-\cos\varphi\sin(wt-\hat{k}.\vec{r})\cos(wt-\hat{k}.\vec{r})+\sin(wt-\hat{k}.\vec{r})\cos\varphi$$

$$\left.\cos(wt-\hat{k}.\vec{r})+\sin^{2}(wt-\hat{k}.\vec{r})\sin\varphi\right]=\frac{-\kappa}{c}E_p\,E_s\sin\varphi$$

۱۷ - ۱۰ - برای فلزات در ناحیهٔ طیفی فروسرخ، در فرکانس $w=g/(-\varepsilon)\approx 10^{14}\,s^{-1}$ داریم $K_i=-K_r$. برای این حالت ثابت اپتیکی n و k را برحسب K_i محاسبه کنید.

حل:

$$\hat{n}=n+i\kappa\ ,\ \ \hat{\mathbf{K}}=\mathbf{K}_r+i\mathbf{K}_i\ \ ,\ \ \mathbf{K}_r=\mathbf{K}\ ,\ \mathbf{K}_i=\frac{g}{\varepsilon_\circ w}$$

$$\hat{n}=\sqrt{\hat{\mathbf{K}}},\hat{n}^{2}=\hat{\mathbf{K}}\ \Rightarrow\ n^{2}-\kappa^{2}+2i\kappa n=\mathbf{K}_r+i\mathbf{K}_i$$

$$\Rightarrow\begin{cases}n^{2}-\kappa^{2}=\mathbf{K}_r\\2\kappa n=\mathbf{K}_i\end{cases}$$

$$\kappa=\frac{\mathbf{K}_i}{2n}\Rightarrow n^{2}-\frac{\mathbf{K}_i^{2}}{4n^{2}}=\mathbf{K}_r\Rightarrow 4n^{4}-\mathbf{K}_i^{2}=4n^{2}\mathbf{K}_r$$

$$\Rightarrow 4n^{4}-4n^{2}\mathbf{K}_r-\mathbf{K}_i^{2}=\circ$$

$$n^{2}=x\Rightarrow x^{2}-x\mathbf{K}_r-\frac{\mathbf{K}_i^{2}}{4}=\circ\Rightarrow x=\frac{\mathbf{K}_r\pm\sqrt{\mathbf{K}_r^{2}-\mathbf{K}_i^{2}}}{2}$$

$$\Rightarrow n^{2}=\frac{1}{2}\left[\mathbf{K}_r+\sqrt{\mathbf{K}_r^{2}+\mathbf{K}_i^{2}}\right]\Rightarrow n=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\mathbf{K}_r+\sqrt{\mathbf{K}_r^{2}+\mathbf{K}_i^{2}}\right]}\ (1)$$

PowerEn.ir

$$\frac{\mathbf{K}_i}{2\kappa}=n\Rightarrow\frac{\mathbf{K}_i^2}{4\kappa^2}-\kappa^2=\mathbf{K}_r\Rightarrow\mathbf{K}_i^2-4\kappa^2=4\kappa^2\mathbf{K}_r$$

$$4\kappa^4+4\kappa^2\mathbf{K}_r-\mathbf{K}_i^2=0,\kappa^2=x\Rightarrow x^2+x\mathbf{K}_r-\frac{\mathbf{K}_i^2}{4}=0$$

$$4\kappa^4+4\kappa^2\mathbf{K}_r-\mathbf{K}_i^2=0\ ,\ \kappa^2=x\Rightarrow x^2+x\mathbf{K}_r-\frac{\mathbf{K}_i^2}{4}=0$$

$$x=\frac{-\mathbf{K}_r\pm\sqrt{\mathbf{K}_r^2+\mathbf{K}_i^2}}{2}\Rightarrow\kappa=\sqrt{\frac{1}{2}\left[-\mathbf{K}_r+\sqrt{\mathbf{K}_r^2+\mathbf{K}_i^2}\right]}\quad(2)$$

$$w=\frac{g}{-\varepsilon}=10^{14}s^{-1}\ ,\ \mathbf{K}_i=-\mathbf{K}_r\quad n,k=?$$

$$(1)\Rightarrow n=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\mathbf{K}_r+\sqrt{\mathbf{K}_r^2+\mathbf{K}_i^2}\right]}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[-\mathbf{K}_i+\sqrt{2\mathbf{K}_i^2}\right]}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left[-\mathbf{K}_i+\mathbf{K}_i\sqrt{2}\right]}=\sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{K}_i\left[\sqrt{2}-1\right]}$$

$$(2)\Rightarrow\kappa=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\mathbf{K}_i+\sqrt{2\mathbf{K}_i^2}\right]}=\sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{K}_i(1+\sqrt{2})}$$

۱۷ - ۱۱ - برای دی‌الکتریکی که در فرکانسهای زیاد جذب‌کننده می‌شود، یا برای یک نیمرسانا داریم $K_i=K_r$. برای این مورد n و k را بر حسب K_r محاسبه کنید. نسبت طول تضعیف به طول موج، δ/λ را پیدا کنید.

حل:

$$\mathbf{K}_r=\mathbf{K}_i\Rightarrow n=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\mathbf{K}_r+\sqrt{2\mathbf{K}_r^2}\right]}=\sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{K}_r\left[1+\sqrt{2}\right]}$$

$$k=\sqrt{\frac{1}{2}\left[-\mathbf{K}_r+\sqrt{2\mathbf{K}_r^2}\right]}=\sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{K}_r\left[\sqrt{2}-1\right]}$$

$$\delta=\frac{c}{\kappa w}\ ,k_r=\frac{nw}{c}\Rightarrow\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{nw}{c}\Rightarrow\lambda=\frac{2\pi c}{nw}$$

$$\frac{\delta}{\lambda}=\frac{n}{2\pi\kappa}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}}=0/4$$

۱۷ - ۱۲ - نشان دهید که در محیطی تقریباً شفاف با ضریب شکست n، طول تضعیف δ به صورت زیر به رسانندگی g مربوط است.

$$\delta=\frac{2n}{g\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}$$

در اینجا $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}=377\Omega$

حل:

$$\hat{\mathbf{K}}=\mathbf{K}_r+i\mathbf{K}_i,\mathbf{K}_r=\mathbf{K}\ ,\ \mathbf{K}_i=\frac{g}{\varepsilon_0 w}\qquad(1)$$

$$\hat{n}^2=\mathbf{K}_r+i\mathbf{K}_i=n^2-\kappa^2+2in\kappa\Rightarrow\mathbf{K}_i=2n\kappa\qquad(2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow\frac{g}{\varepsilon_0 w}=2n\kappa\Rightarrow\kappa=\frac{g}{2n\varepsilon_0 w}\qquad(3)$$

$$\delta=\frac{1}{k_i}=\frac{c}{\kappa w}\qquad(4)$$

$$(3),(4)\Rightarrow\delta=\frac{c}{\left(\frac{g}{2n\varepsilon_0 w}\right)w}=\frac{2n}{g}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$

۱۷ - ۱۳ - بردار پوئین‌تینگ که متناسب E^2 است به صورت $e^{-\alpha x}$ افت می‌کند. در اینجا $\alpha=2/\delta$ ضریب جذب نامیده می‌شود. افت توان را غالباً بر حسب دسی‌بل بر متر (dB/m) بیان می‌کنند و بنا بر تعریف یک دسی‌بل برابر لگاریتم معمولی نسبت شار انرژی اولیه به نهایی در واحد سطح است.

(الف) نشان دهید $\alpha\,dB/m=4/34\alpha$ = افت توان. (ب) از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۷-۱۲، محاسبه کنید که رسانندگی (اپتیکی نه dc) یک محیط مخابرات امواج نوری چه مقدار باید باشد تا آنکه افت توانی کمتر از $1dB/km$ حاصل شود. فرض کنید ضریب شکست $n=1/5$ است.

حل:

(ضریب جذب) $\alpha=\frac{2}{\delta}$ شار انرژی در واحد سطح: $S\times E^2e^{-\alpha Z}$

افت توان غالباً با $(\frac{dB}{m})$ بیان می‌شود.

$$1dB=10\log_{10}^{\frac{s_i}{s_f}}$$

$$\begin{cases}s_i=s(z=0)\propto E^2 & \text{(شار انرژی اولیه در واحد سطح)}\\ s_f=s(Z=L)\propto E^2e^{-\alpha L} & \text{(شار انرژی نهایی در واحد سطح)}\end{cases}$$

$$1dB=10\log\frac{E^2}{E^2e^{-\alpha L}}=10\log_{10}^{e^{\alpha L}}$$

$$=10\alpha L\frac{\ln e}{\ln 10}=\frac{10\alpha L}{\ln 10}=4/34\alpha L$$

افت توان: $\frac{1dB}{L}=\frac{10\alpha}{\ln 10}=4/34\alpha(\frac{dB}{m})$

ب)

$$\text{افت توان}\le\frac{1\,dB}{km}=10^{-3}\frac{1dB}{m}$$

$$\left.\begin{array}{l}10^{-3}(\frac{dB}{m})=4/34\ \alpha(\frac{dB}{m})\Rightarrow\alpha=\frac{10^{-3}}{4/34}=\frac{2}{\delta}\Rightarrow\delta=8/68\times10^3\\ \text{مسئله ۱۷-۱۲: }\delta=\frac{2n}{g}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\ ,n=1/5\Rightarrow\delta=\frac{3}{g\times377}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\quad g=9/168\times10^{-7}\ \ (\Omega m)^{-1}$$

۱۷ - ۱۴ - فرض کنید ثابت دی‌الکتریک $K=0$ است. (الف) نشان دهید معادلات ماکسول بدون چگالیهای بار خارجی و جریان، پاسخی به صورت موج طولی دارند که در آن $H=0$ است و $k\times E=0$، ولی $k.E\neq0$. (ب) نشان دهید که چگالی بار قطبشی به مقدار $\rho_p=ik\varepsilon_0 E$ وجود خواهد داشت. (معادله $K(k,w)=0$، را رابطه پاشندگی طولی می‌نامند).

حل:

$$\mathbf{K}=0\ ,\quad\rho=0\ ,\quad J=0$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=0\Rightarrow i\vec{k}.\vec{B}=0\Rightarrow i\vec{k}.\vec{H}=0\Rightarrow\vec{k}\perp\vec{H}\ (1)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\frac{\partial\varepsilon E}{\partial t}=\frac{\partial\mathbf{K}\varepsilon_0 E}{\partial t}=0\Rightarrow i\vec{k}\times\vec{H}=0\Rightarrow\vec{k}\|\vec{H}\ (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow\vec{H}=0$$

PowerEn.ir

چون یک بردار نمی‌تواند همزمان هم بر یک بردار و هم موازی با آن باشد مگر اینکه بردار صفر باشد.

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0\Rightarrow\vec{k}\times\vec{E}=0\Rightarrow\vec{k}\parallel\vec{E}\Rightarrow\vec{k}.\vec{E}\neq 0 \quad *$$

باید این رابطه * برقرار باشد، چون وگرنه برای این حالت هم $\vec{E}=0$ بوجود می‌آمد.

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=\vec{\nabla}.\varepsilon\vec{E}=\vec{\nabla}.\mathbf{K}\varepsilon_0\vec{E}=0$$
$$\Rightarrow\ \vec{\nabla}.\vec{D}=0=\vec{\nabla}.[\varepsilon_0\vec{E}+\vec{p}]=0$$
$$\Rightarrow\ \varepsilon_0\vec{\nabla}.\vec{E}=-\vec{\nabla}.\vec{p}\Rightarrow\varepsilon_0 i\vec{K}.\vec{E}=-\vec{\nabla}.\vec{p}$$
$$\Rightarrow\ -\vec{\nabla}.\vec{p}=\rho_p=\varepsilon_0 ikE$$

نکته: از معادلات ماکسول بدون بار و جریان، جوابی به صورت موج طولی که در آن $\vec{H}=0$ و $\vec{k}\times\vec{E}=0$ و $\vec{k}.\vec{E}\neq 0$ بدست می‌آید و یک چگالی بار قطبی به مقدار $\rho_p=ik\varepsilon_0 E$ وجود خواهد داشت.

۱۷ - ۱۵ - بنا بر مکانیک کوانتومی، انرژی فوتون hf است که در آن h ثابت پلانک برابر است با $6/63\times10^{-34}\ Js$. باریکه‌ای از نور مرئی در خلأ ($f=6\times10^{14}\ Hz$) بر روی سطح مقطعی به مساحت ۱ میلی‌متر مربع کانونی شده است و تقریباً یک موج تخت طویل است. اگر میدان الکتریکی موج یک ولت بر متر باشد، طول قطار موج هر "فوتون" را محاسبه کنید.

حل: با در نظر گرفتن پرتو نور به صورت استوانه‌ای با سطح مقطع $1mm^2$، انرژی الکترومغناطیسی را برای طول L استوانه محاسبه می‌کنیم. انرژی حاصل را با انرژی فوتون برابر قرار می‌دهیم تا طول قطار موج حاصل شود:

$$E_{EM}=uV=uAL \qquad (1)$$ انرژی الکترومغناطیسی

$$u=\frac{1}{\mu_0}(\frac{n}{C})^2E\ ,\quad E=1(\frac{V}{m})\overset{n=1}{\Longrightarrow}u=\frac{1}{\mu_0 C^2} \qquad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow E_{EM}=\frac{AL}{\mu_0 C^2}=hf\ \Rightarrow\ L=\frac{fh\mu_0 C^2}{A}$$

$$L=\frac{(6\times10^{14})(6/63\times10^{-34})(4\pi\times10^{-7})(3\times10^8)^2}{1\times10^{-6}}$$

$$=4/5\times10^{-2}\ (m)$$

۱۷ - ۱۶ - عمق پیوسته در فلز جیوه در $f=10^5\ Hz$ چقدر است؟

حل: عمق پوسته برای فلزات در فرکانسهای میکروموج و پائین‌تر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\delta\approx\sqrt{\frac{2}{\mu_0 wg}}$$

جدول (۱-۷): $\frac{1}{g}=95/8\times10^{-8}\ (\Omega m)$

بنابراین:

$$\delta\approx\sqrt{\frac{2\times95/8\times10^{-8}}{(4\pi\times10^{-7})\times(2\pi\times10^5)}}=1/56\times10^{-3}$$

ماورای ملمع

آگاهی‌ات را به طرف مسیر مثبت حقیقت برگردان و بدان هر چیزی که به تو داده شده درست می‌باشد و با قدرشناسی از حقیقت تشکّر کن.

روزی « نارادا » صوفی بزرگ هند در حال رفتن به خانه‌ی خدا از میان جنگلی عبور می‌کرد و در حین راه رفتن «وینا»اش را می‌نواخت تا اینکه در زیر در ختی به حکیم خیلی پیری رسید.

حکیم پیر گفت: «لطفاً از خدا برایم سئوالی بپرس. من سال‌هاست که برای اتصال به حقیقت تلاش می‌کنم, حالا چقدر دیگر لازم است ؟ من چه وقتی از زندان دنیای مادی رها می‌شوم؟»

نارادا خندید و گفت: «باشد» وقتی از آنجا دور می‌شد ، در زیر درخت دیگری مرد جوانی را یافت که با «اکتارا» می‌خواند و می‌رقصید. نارادا به شوخی از او پرسید: « آیا تو هیچ سئوالی از خداوند نداری؟» مرد جوان درست مثل اینکه اصلاً چیزی نشنیده باشد ، به رقصش ادامه داد.

پس از چند روز نارادا بازگشت و به پیرمرد رسید. به او گفت: «سئوالت را از خداوند پرسیدم ، او گفت بیش از سال‌هایی که زحمت کشیده‌ای ، زمان مانده است.»

پیرمرد ناگهان دچار جنون شد ، تسبیح و کتاب مقدسش را پرت کرد و گفت: «این بی‌انصافی است! هنوز هم این همه سال باقی مانده؟!» پیرمرد تسبیح و خلاصه هرچیزی که درمقابلش بود را به گوشه‌ای پرت کرد و همانند دیوانه‌ها شروع به فریاد کشیدن نمود.

نارادا نزد مرد جوان رفت ، مرد جوان هنوز هم می‌رقصید. نارادا گفت: هر چند تو سئوالی نکرده بودی, ولی به هر حال برایت پرسیدم. امّا با دیدن عکس‌العمل پیرمرد ، مردد هستم و نمی‌دانم که پاسخ خدا را به تو بگویم یا خیر.» امّا مرد جوان به رقصش ادامه داد و چیزی نگفت.

نارادا بالاخره گفت: «وقتی از خدا سؤال کردم که برای تو تا اتصال به حقیقت چقدر زمان مانده ، خداوند گفت: «به مرد جوان بگو به تعداد درخت‌ها یا حتّی برگ‌های درختانی که در زیرشان نرقصیده ، زمان باقی مانده تا به حقیقت برسد.» و مرد جوان با بیشترین جذبه شروع به رقصیدن کرد و گفت: «در دنیا درخت‌ها بسیاری وجود دارند که پر برگ‌اند و هنوز من در زیرشان نرقصیده‌ام! چقدر عالی ، دفعه‌ی بعد که خداوند را دیدی از او بسیار تشکّر کن!» و گفته شده که همان لحظه مرد جوان به اشراق نائل گشت. اگر حقیقت چنین است پس به دانستن زمان نیازی نیست. اگر حقیقتاً و بدون نفس به دنبال حقیقت نمی‌باشی ، پس سال‌ها و سال‌ها نیز کافی نخواهد بود. من احساس می‌کنم که آن پیرمرد هرگز به حقیقت درونی‌اش نائل نشد. چنین طرز فکری ، هرگز نمی‌تواند به آزادی برسد ، این طرز فکر چه جهنمی است.

PowerEn.ir

۱۸

امواج تکفام در ناحیه‌های مرزدار

بازتاب و شکست در مرز دو محیط نارسانا: فرود عمود

امواج الکترومغناطیسی در حال انتشار در مواد معمولاً از مرز بین ماده و محیطی دیگر (مثلاً هوا یا خلاء) وارد ماده می‌شوند. این بررسی را با ساده ترین مورد ممکن آغاز می‌کنیم: موج تختی که به طور عمود بر فصل مشترک تخت یک دی‌الکتریک فرود می‌آید. تجربه به ما می‌گوید که موج فرودی با یک موج بازتابیده و یک موج انتقال یافته همراه خواهد بود، در واقع، تنها در صورت حضور این دو موج است که شرایط مرزی برقرار می‌شوند. در اینجا نیز ما تنها محیطهای غیر مغناطیسی را بررسی خواهیم کرد.

در شکل زیر $\vec{E}_1, \vec{B}_1$ توصیف کننده موج فرودی است که در جهت مثبت z حرکت می‌کند. E'_1, B'_1 توصیف کننده موج بازتابیده‌ای است که در جهت منفی z حرکت می‌کند و $\vec{E}_2, \vec{B}_2$ توصیف کننده موج تراگسیلیده است.

میدانهای الکتریکی که در ابتدا فرض می‌شود در جهت x به‌طور خطی قطبی شده‌اند با روابط زیر توصیف می‌شوند:

$$\vec{E}_1 = \hat{i} E_{1x} e^{i(k_1 z - wt)}$$
$$\vec{E}'_1 = -\hat{i} E'_{1x} e^{-i(k_1 z - wt)} \qquad (۱-۱۸)$$
$$\vec{E}_2 = \hat{i} E_{2x} e^{i(k_2 z - wt)}$$

که در آن، $k_1 = n_1 \frac{w}{c}, k_2 = n_2 \frac{w}{c}$ (n_2, n_1 ضریب شکست دو محیط) است. از معادله $\vec{\hat{B}} = \frac{n}{c} \hat{u} \times \vec{\hat{E}}$ میدانهای مغناطیسی وابسته به میدانهای الکتریکی در معادله (۱-۱۸) به‌دست می‌آیند:

$$C\vec{B}_1 = \hat{j} n_1 E_{1x} e^{i(k_1 z - wt)}$$
$$C\vec{B}'_1 = \hat{j} n_1 E'_{1x} e^{-i(k_1 z - wt)} \qquad (۲-۱۸)$$
$$C\vec{B}_2 = \hat{j} n_2 E_{2x} e^{i(k_2 z - wt)}$$

واضح است که امواج بازتابیده و انتقالی چنانچه بخواهیم شرایط مرزی در $z = 0$ برای تمام مقادیر t صادق باشند، باید با موج فرودی فرکانس یکسانی، w، داشته باشند. از آنجا که مؤلفه‌های عمودی میدانهای صفرند، تنها لازم است که شرایط مرزی بر روی مؤلفه مماسی میدان‌ها در نظر گرفته شوند. میدان E باید در مرز پیوسته باشد. بنابراین در $z = 0$ داریم:

$$E_{1x} - E'_{1x} = E_{2x} \qquad (۳-۱۸)$$

میدان H نیز باید پیوسته باشد و برای محیطهای غیرمغناطیسی ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) میدان B نیز باید پیوسته باشد:

$$n_1(E_{1x} + E'_{1x}) = n_2 E_{2x} \qquad (۴-۱۸)$$

از دو معادله بالا داریم:

$$E'_{1x} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_{1x}, E_{2x} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_{1x} \qquad (۵-۱۸)$$

$$\frac{E'_{1x}}{E_{1x}} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} = r_{12}, \frac{E_{2x}}{E_{1x}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = t_{12} \qquad (۶-۱۸)$$

t_{12}, r_{12} به ترتیب، ضرایب فرنل بازتاب و تراگسیل برای فرود عمودی، نامیده می‌شوند.

اگر n_2 بزرگتر از n_1 باشد، نسبت اول یعنی r_{12} مثبت است و در مرز E'_{1x} با E_{1x} همفاز است.

میانگین شارهای انرژی بازتابیده و تراگسیلیده در واحد سطح با بردار پوئین تینگ داده می‌شوند و به شدت موج معروفاند. در هر یک از دو محیط برای هر قطبش برابر است با:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \frac{n}{\mu_0 c} (E_p^2 + E_s^2) \qquad (۷-۱۸)$$

در اینجا بنابر انتخاب ما، $E_s = 0, E_p = E_x$.

حال ضریب بازتاب، R_n و ضریب انتقال، T_n، را برای فرود عمودی برحسب نسبت شدتها تعریف می‌کنیم:

$$\frac{\bar{S}'_1}{\bar{S}_1} = R_n \quad , \frac{\bar{S}_2}{\bar{S}_1} = T_n \qquad (۸-۱۸)$$

و بنابر معادلات بالا داریم:

$$R_n = r_{12}^2 \, , T_n = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^2 \qquad (۹-۱۸)$$

در واقع ضرایب بازتاب و تراگسیل در معادله بالا برای هر محیطی از محیطهای نارسانا، در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$R_n + T_n = 1 \qquad (۱۰-۱۸)$$

PowerEn.ir

این رابطه بیان پایستگی انرژی در فصل مشترک است.

اگر موج فرودی به‌طور بیضوی قطبیده باشد، باید علاوه بر مؤلفه‌های x در هر یک از محیطهای مؤلفه‌های عمود $\hat{E}_y = \hat{E}_s$ را نیز در نظر بگیریم. این مؤلفه‌ها نیز در معادله‌های ضرایب فرنل، صدق می‌کنند. سه مؤلفه y همگی با یکدیگر همفازند، هر چند که سه مؤلفه x اختلاف فاز دارند. شدتهای وابسته به مؤلفه‌های x (مؤلفه‌های P) و مؤلفه‌های y (مؤلفه‌های s) بدون توجه به اختلاف فاز بین این مؤلفه‌ها، یعنی بدون توجه به درجه قطبش بیضوی، به طور ساده با هم جمع می‌شوند

$$\overline{S} = \overline{S}_p + \overline{S}_s \qquad (۱۸-۱۱)$$

بنابراین، معادله‌های (۱۸-۸) تا (۱۸-۱۰) به‌طور جداگانه برای هر یک از مؤلفه‌های قطبش و همچنین برای شدتهای کل معتبرند.

بازتاب و شکست در مرز دو محیط نارسانا: فرود مایل

در این قسمت بازتاب امواج تخت از فصل مشترک یک عایق در حالتی که این امواج به‌طور مایل فرود بیایند را بررسی می‌کنیم. وضعیت مورد بحث مربوط به حالتی است که بردارهای انتشار $\vec{k}_1$، $\vec{k}_2$ ،$\vec{k}'_1$ هم‌صفحه‌اند و همگی در صفحه xz قرار دارند و بردارهای میدان الکتریکی $\vec{E}_1$، $\vec{E}'_1$ ،$\vec{E}_2$ نیز در این صفحه قرار گرفته‌اند. میدانهای الکتریکی امواج فرودی، بازتابیده و تراگسیلیده با معادلات زیر داده می‌شوند.

$$\vec{E}_1 = \hat{E}_{1p}\, e^{i(\vec{k}_1.\vec{r} - wt)} \qquad (۱۸-۱۲)$$

$$\vec{E}'_1 = \hat{E}_{1p}\, e^{i(\vec{k}'_1.\vec{r} - wt)}$$

$$\vec{E}_2 = \hat{E}_{2p}\, e^{i(\vec{k}_2.\vec{r} - wt)}$$

صفحه‌ای که با $\hat{n}, \vec{k}_1$ تعریف می‌شود صفحه فرود نامیده می‌شود، و بردار عمود بر آن صفحه در جهت $\hat{n}\times\vec{k}_1$ است. در حقیقت، $\dfrac{(\hat{n}\times\vec{k}_1)}{|\hat{n}\times\vec{k}_1|} = \hat{j}$ برداریکه در جهت y است.

روشن است که نه تنها امواج بازتابیده و تراگسیلیده باید با موج فرودی فرکانس یکسانی داشته باشند، بلکه در تمام نقاط روی مرز فازها نیز باید با یکدیگر مطابقت داشته باشند، یعنی، برای هر بردار $\vec{r}_0$ روی مرز داریم:

$$\vec{k}'_1.\vec{r}_0 = \vec{k}_1.\vec{r}_0 = \vec{k}_2.\vec{r}_0 \qquad (۱۸-۱۳)$$

این شرط سه پیامد جالب دارد:

۱- چهار بردار $\vec{k}_1$، $\vec{k}'_1$، $\vec{k}_2$ و $\hat{n}$ همگی هم صفحه‌اند.

۲- زاویه فرود با زاویه بازتاب برابر است.

۳- قانون اسنل:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad (۱۸-۱۴)$$

هیچ یک از این نتایج به اینکه محیط یک رسانا با یک دی‌الکتریک کامل است بستگی ندارد.

هیچ یک از این سه نتیجه به شرایط مرزی برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی که از معادلات ماکسول به دست آمدند، بستگی ندارند.

دو نتیجه اول برای هر نوع موجی صادق است. نتیجه سوم، قانون اسنل، به رابطه خاص پاشندگی برای امواج بستگی دارد.

پیوستگی مؤلفه‌های مماسی میدان‌های H, E با ضرایب فرنل بیان می‌شوند. این ضرایب عبارتند از نسبتهای دامنه‌های میدان E امواج بازتابیده و تراگسیلید به دامنه موج فرودی این ضرایب برای قطبشهای p, s (به ترتیب، مربوط به بردار E عمود بر و موازی با صفحه فرود) متفاوت است. برای بازتاب

$$r_{12s} = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}$$

$$r_{12p} = \frac{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} \qquad (۱۸-۱۵)$$

$$t_{12s} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}$$

$$t_{12p} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2}$$

این ضرایب فرنل پاسخ کاملی برای مسئله مقدار مرزی داریم، زیرا هر موجی فرودی با قطبشی دلخواه را می‌توان به مؤلفه‌های s, p تجزیه کرد.

با استفاده از قانون اسنل می‌توانیم بنویسیم:

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_1} \qquad (۱۸-۱۶)$$

و بدین وسیله ضرایب فرنل را کلاً برحسب پارامترهای ماده، n_2, n_1 و زاویه فرود مفروض، θ_1، بیان کنیم. از ضرایب فرنل روابط بین شدتها را نیز می‌توان به‌دست آورد. البته هر یک از دو جهت قطبش باید جداگانه بررسی شود. ضریب انعکاس و ضریب انتقال را به صورت نسبت میانگین زمانی مؤلفه عمود بر فصل مشترک بردارهای پوئین تینگ مربوط به مؤلفه عمود بردار پوئین تینگ فرودی، تعریف می‌کنیم.

$$R_s = \frac{\hat{n}.\overline{S}'_{1s}}{\hat{n}.\overline{S}_{1s}} \qquad T_s = \frac{\hat{n}.\overline{S}_{2s}}{\hat{n}.\overline{S}_{1s}} \qquad (۱۸-۱۷)$$

$$R_p = \frac{\hat{n}.\overline{S}'_{1p}}{\hat{n}.\overline{S}_{1p}} \qquad T_p = \frac{\hat{n}.\overline{S}_{2p}}{\hat{n}.\overline{S}_{1p}}$$

برحسب ضرایب فرنل داریم:

$$R_s = r_{12s}^2 \qquad T_s = \frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1} t_{12s}^2 \qquad (۱۸-۱۸)$$

$$R_p = r_{12p}^2 \qquad T_p = \frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1} t_{12p}^2 \qquad (۱۸-۱۹)$$

بنابراین اتحادهای

$$R_s + T_s = 1 \qquad R_p + T_p = 1 \qquad (۱۸-۲۰)$$

برای مورد فرود مایل بر سطح یک جسم نارسانا نیز معتبرند.

در بعضی موارد بهتر است که ضرایب فرنل را به صورت زیر بنویسیم:

$$r_{12s} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \qquad (۱۸-۲۱)$$

$$t_{12s} = \frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}$$

PowerEn.ir

$$t_{12p}=\frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)}\quad,\quad r_{12p}=\frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}$$ را از

زاویه بروستر: زاویه حد

قبلاً مورد فرود عمودی $\theta_1=0$ را بررسی کرده‌ایم: قطبش اهمیتی ندارد و هر چه اختلاف نسبت $\frac{n_2}{n_1}$ با یک بیشتر باشد، R بزرگتر است. برای فرود خراشان یعنی $\theta_1=\frac{\pi}{2}$ داریم $\cos\theta_1=0$ و به آسانی از معادله‌های (۱۸-۱۵) می‌توان دید که $R_s=1=R_p$ برای فرود تقریباً خراشان ضریب بازتاب بزرگ است، دلیل آنکه دریاچه‌ای آرام همانند یک آینه است همین بزرگ بودن ضریب انعکاس است.

اگر $\theta_1=\theta_2$ باشد، $\tan(\theta_1-\theta_2)=0=\sin(\theta_2-\theta_1)$ و موج بازتابیده وجود نخواهد داشت ولی این وضعیت تنها در صورتی رخ می‌دهد که $n_1=n_2$، یعنی تنها در صورتی که دو محیط از نظر اپتیکی تمیزناپذیر باشند. از طرف دیگر، اگر $\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$ باشد $\tan(\theta_1+\theta_2)$ بی‌نهایت خواهد بود و دامنه موج بازتابیده قطبش p مجدداً صفر می‌شود. در این حالت محیط‌ها از نظر اپتیکی تمیزپذیرند. چون موج قطبش s، که $\vec{E}$ی آن عمود بر صفحه فرود است، به طور جزئی منعکس می‌شود، نور غیرقطبیده ای که زاویه فرود آن در شرط $\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$ صدق کند بر اثر بازتاب قطبیده خواهد شد. به کمک قانون اسنل مقدار θ_1 به صورت زیر به دست می‌آید.

$$n_1\sin\theta_B=n_2\sin(\frac{\pi}{2}-\theta_B)=n_2\cos\theta_B \qquad (۱۸-۲۲)$$

یا

$$\tan\theta_B=\frac{n_2}{n_1} \qquad (۱۸-۲۳)$$

کمیت θ_B به زاویه بروستر مشهور است، رابطه بین این کمیت و ضرایب شکست به قانون بروستر مشهور است. قطبیده کردن نور در زاویه بروستر روشی عملی برای تولید تابش قطبیده است، هرچند که متداول‌ترین روش نیست. علاوه بر فرود خراشان حالت دیگری نیز وجود دارد که برای آن $R_s=R_p=1$ است. برای $\theta_2=\frac{\pi}{2}$ نیز همانند حالت $\theta_1=\frac{\pi}{2}$ بازتاب کامل رخ می‌دهد. زاویه فرودی که برای آن $\theta_2=\frac{\pi}{2}$ است زاویه حد، $\theta_1=\theta_c$ نامیده می‌شود. از قانون اسنل

$$\sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1} \qquad (۱۸-۲۴)$$

چنانچه $n_2<n_1$ باشد، زاویه حد یک زاویه حقیقی است. بنابر معادله‌های (۱۸-۲۳)،(۱۸-۲۴)

$$\tan\theta_B=\sin\theta_C \qquad (۱۸-۲۵)$$

چون مقدار $\tan\theta$ حدی ندارد، همواره یک زاویه بروستر حقیقی وجود دارد؛ به علاوه چون $\tan\theta>\sin\theta$ است. نتیجه می‌شود که $\theta_B<\theta_C$. برای زوایای فرودی بزرگتر از زاویه حد $\theta_1>\theta_C$ از قانون اسنل نتیجه می‌شود

$$\sin\theta_2=\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1>\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_C \qquad (۱۸-۲۶)$$

و چون $\sin\theta_C=\frac{n_2}{n_1}$ است، لازم است که

$$\sin\theta_2>1 \qquad (۱۸-۲۷)$$

برای تمام مقادیر $\theta_1\geq\theta_C$ داریم $R_s=R_p=1$. این بازتاب کامل را بازتاب کلی می‌نامند.

ضرایب فرنل مختلط: بازتاب از یک سطح رسانا

اگر محیط ۲ رسانا باشد و محیط ۱، محیطی غیر رسانا باشد، بدین ترتیب معادله (۱۸-۱۳) تبدیل می‌شود به

$$\hat{n}\times\vec{k}_1=\hat{n}\times\vec{\hat{k}}_2=\hat{n}\times\vec{k}_{2r}+i\hat{n}\times\vec{k}_{2i} \qquad (۱۸-۲۸)$$

که در آن $\hat{k}_2=k_{2r}+ik_{2i}$. از آنجا که $\vec{k}_1,\hat{n}$ هر دو حقیقی هستند، برداریکه عمود بر صفحه فرود حقیقی است و بازهم درست برابر است با $\vec{j}$. آنگاه مشابه قبل داریم:

$$\vec{k}_{2i}.\vec{j}=0 \qquad (۱۸-۲۹)$$

بنابراین قسمتهای حقیقی و موهومی $\vec{k}_2$ هر دو بر $\vec{j}$ عمودند (یعنی، در صفحه فرود واقع‌اند). (همچنین، سمت راست (۱۸-۲۸) می‌بایست حقیقی باشد، پس $\hat{n}\times\vec{k}_{2i}=0$ بدین ترتیب قسمت حقیقی $\vec{k}_2$ برداری است در جهت $\hat{n}$، یعنی عمود بر فصل مشترک) و قانون اسنل به صورت زیر در می‌آید:

$$n_1\sin\theta_1=\hat{n}_2\sin\hat{\theta}_2 \qquad (۱۸-۳۰)$$

تمام عملیات جبری با شرایط مرزی روی میدانهای B,E معتبرند، بنابراین ضرایب فرنل قبل داده می‌شود، با این تفاوت که در این معادلات $\hat{n}_2,\cos\hat{\theta}_2$ مختلط‌اند، اگر این ضرایب مختلط را به صورت قطبی بنویسیم.

$$\hat{r}_{12s}=|\hat{r}_{12s}|e^{i\alpha_s}\ ,\hat{r}_{12p}=|\hat{r}_{12p}|e^{i\alpha_p},\ldots \qquad (۱۸-۳۱)$$

بنابراین:

$$\hat{E}'_{1s}=|\hat{r}_{12s}|e^{i\alpha_s}\hat{E}_{1s}\quad \hat{E}'_{1p}=|\hat{r}_{12p}|e^{i\alpha_p}\hat{E}_{1p},\ldots (۱۸-۳۲)$$

روشن خواهد بود که میدانهای Eی بازتابیده و تراگسیلیده نسبت به میدان Eی فرودی انتقال فاز خواهند داشت. ضرایب بازتاب حقیقی برای شدتها، به صورت زیر در می‌آیند:

$$R_s=|\hat{r}_{12s}|^2\qquad R_p=|\hat{r}_{12p}|^2 \qquad (۱۸-۳۳)$$

زیرا فازها بر روی متوسط زمانی بردارهای پوتین تینگ تاثیری ندارند. هنگامی که یکی از محیط‌ها رساناست، به جای $R+T=1$ اتحادهای زیر مفیدند:

$$\hat{r}_{12}=-\hat{r}_{21} \qquad (۱۸-۳۴)$$

$$\hat{r}_{12}^2+\hat{t}_{12}\hat{t}_{21}=1$$

این اتحادها هم برای قطبش s و هم برای قطبش p معتبرند. برای فرود عمود از هوا بر روی محیطی رسانا، با $n_1=1$، $\hat{n}_2=n+ik$، ضریب انعکاس عبارت است از:

PowerEn.ir

$$R_n=\frac{(n-1)^2+k^2}{(n+1)^2+k^2} \qquad (۱۸-۳۵)$$

از آنجا که تمامی انرژی انتقالی در محیط رسانای نیمه نامتناهی نهایتاً جذب خواهد شد، ما ضریب جذب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A=1-R \qquad (۱۸-۳۶)$$

برای فرود عمود

$$A_n=\frac{2n}{(n+1)^2+k^2} \qquad (۱۸-۳۷)$$

اگر $n<<1$، یا $n>>1$، یا $k>>1$ باشد، ضریب جذب کوچک است (ضریب بازتاب بزرگ است) هنگامی که $n\approx k>>1$، داریم:

$$A_n\approx\frac{2}{k}<<1 \qquad (۱۸-۳۸)$$

در این حالت $k\approx\sqrt{\frac{\mathbf{K}_i}{2}}=\sqrt{\frac{g}{2\varepsilon_0 w}}$ بنابراین:

$$A_n\approx 2\sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{g}} \qquad (۱۸-۳۹)$$

رابطه بالا را رابطه هاگن – رونبز می‌نامند. این رابطه برای رساناهای نسبتاً خوب در ناحیه میکرو موج و زیر آن، و برای فلزات تا ناحیه فروسرخ، معتبر باشد.

از مقایسه دو عبارت معادل زیر برای $\vec{k}_2$:

$$\vec{\hat{k}}=\vec{\hat{k}}_r+i\vec{\hat{k}}_i \qquad (۱۸-۴۰)$$

$$\vec{\hat{k}}=\hat{k}\sin\hat{\theta}\,\hat{i}+\hat{k}\cos\hat{\theta}\,\hat{k}$$

با استفاده از معادله (۱۸-۲۸) در معادله (۱۸-۴۰) داریم:

$$\vec{k}_r\times\hat{n}=\vec{k}_1\times\hat{n} \qquad (۱۸-۴۱\text{الف})$$

$$\vec{k}_i\times\hat{n}=0 \qquad (۱۸-۴۱\text{ب})$$

معادله (۱۸-۴۱الف) نشان می‌دهد که k_i با $\hat{n}=\hat{k}$ موازی است، و معادله (۱۸-۴۱ ب) عبارت است از:

$$k_r\sin\Theta=k_1\sin\theta_1 \qquad (۱۸-۴۲)$$

که در آن Θ زاویه حقیقی بین $\hat{n},\vec{k}_r$ است. این زاویه را می‌توانیم زاویه شکست حقیقی بنامیم، زیرا زاویه بین صفحات فاز ثابت و صفحه مرزی است. از طرف دیگر، صفحات دامنه ثابت با صفحه مرزی موازی‌اند، لذا آهنگ تضعیف موج در امتداد مستقیماً عمود در درون رسانا از هر امتداد دیگری تندتر است.

معادله (۱۸-۴۰الف) را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$\vec{\hat{k}}.k_r\sin\Theta\,\hat{i}+k_r\cos\Theta\,\hat{k}+ik_i\,\hat{k} \qquad (۱۸-۴۳)$$
$$=k_1\sin\theta_1\,\hat{i}+(k_r\cos\Theta+ik_i)\,\hat{k}$$

از مقایسه مؤلفه‌های معادله بالا با مؤلفه‌های معادله (۱۸-۴۰(ب))، خواهیم دید که:

$$k_1\sin\theta_1=\hat{k}\sin\hat{\theta} \qquad (۱۸-۴۴)$$
$$k_r\cos\Theta+ik_i=\hat{k}\cos\hat{\theta}$$

اگر نمادهای q,p را چنان انتخاب کنیم که:

$$\hat{k}\cos\hat{\theta}=\frac{w}{c}(p+iq) \qquad (۱۸-۴۵)$$

به‌طوری که

$$\hat{n}\cos\hat{\theta}=p+iq \qquad (۱۸-۴۶)$$

آنگاه از معادله (۱۸-۴۴ ب)، $k_r\cos\Theta=(\frac{w}{c})p$ و با استفاده از معادله (۱۸-۴۲) به‌دست می‌آوریم:

$$k_r=\frac{w}{c}\sqrt{p^2+n_1^2\sin^2\theta_1} \qquad (۱۸-۴۷)$$

$$k_i=\frac{w}{c}q$$

با مربع کردن معادله (۱۸-۴۶) و استفاده از قانون اسنل $\hat{n}\sin\hat{\theta}=n_1\sin\theta_1$ و قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی، خواهیم داشت:

$$\mathbf{K}_r-\mathbf{K}_1\sin^2\theta=p^2-q^2 \qquad (۱۸-۴۸)$$

$$\mathbf{K}_i=2pq$$

$$p=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\mathbf{K}_r-\mathbf{K}_1\sin^2\theta_1)+\sqrt{(\mathbf{K}_r-\mathbf{K}_1\sin^2\theta_1)^2+k_i^2}\right]}$$

$$q=\sqrt{\frac{1}{2}\left[-(\mathbf{K}_r-\mathbf{K}_1\sin^2\theta_1)+\sqrt{(\mathbf{K}_r-\mathbf{K}_1\sin^2\theta_1)^2+k_i^2}\right]}$$

بنابراین، q,p تعمیمی از k,n هستند که به زاویه تابش θ_1 بستگی دارند. هنگامی که $\theta_1=0$ باشد، $q=k,p=n$. معادله (۱۸-۴۷الف) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$k_r=N\frac{w}{c} \qquad (۱۸-۴۹)$$

که معادله‌ای است برای تعریف ضریب شکست حقیقی $N(\theta_1)$:

$$N(\theta_1)=\sqrt{p^2+n_1^2\sin^2\theta_1} \qquad (۱۸-۵۰)$$

و این تعریف سرعت فاز را به صورت $\frac{C}{N}$ به‌دست می‌دهد. بنابر معادله (۱۸-۴۲)، N در قانون اسنل به صورت حقیقی صدق می‌کند

$$N\sin\Theta=n_1\sin\theta_1 \qquad (۱۸-۵۱)$$

$$N\cos\Theta=p$$

هر یک از این دو معادله را می‌توان برای یافتن زاویه حقیقی Θ به‌کار برد. هرچند که نه N قسمت حقیقی $\hat{n}$ است و نه Θ قسمت حقیقی $\hat{\theta}$، ولی $N\cos\Theta$ قسمت حقیقی $\hat{n}\cos\hat{\theta}$ است. هنگامی که $\mathbf{K}_i$ خیلی بزرگ است، حالتی که به فرمول هاگن- رونبز منجر می‌شود، داریم:

$$p\approx n\approx q\approx k>>1 \qquad (۱۸-۵۲)$$

از معادله (۱۸-۵۰)

$$N>>1 \qquad (۱۸-۵۳)$$

و از معادله (۱۸-۵۱)

$$\Theta=0 \qquad (۱۸-۵۴)$$

بنابراین زاویه فرود هرچه باشد جهت انتشار تقریباً مستقیماً به درون محیط است، هرچند تضعیف بسیار شدید است، سرعت و طول موج بسیار کاهش می‌یابند. با بازگشت به حالت انعکاس کلی داخلی،

PowerEn.ir

می‌توانیم با کاربرد این نتایج پاسخ آن مسئله را نیز کامل کنیم. در اینجا $n_2=\sqrt{\mathbf{K}_{22}}$ و $\mathbf{K}_{2i}=0$، ولی هنگامی که $\theta_1>\theta_C$ باشد $\cos\hat{\theta}_2$ موهومی است.

$$\cos\hat{\theta}_2=\sqrt{1-\sin^2\hat{\theta}_2}=\sqrt{1-(\frac{n_1}{n_2})^2\sin^2\theta_1} \qquad (18-55)$$
$$=i\sqrt{(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_C})^2-1}$$

از ترکیب معادله‌های (۱۸ – ۵۵)، (۱۸ – ۴۶) داریم:

$$n_2\cos\hat{\theta}_2=in_2\sqrt{(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_C})^2-1}=p+iq \qquad (18-56)$$

بنابراین

$$p=0\ ,\ q=n_2\sqrt{(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_C})^2-1} \qquad (18-57)$$

با داشتن معادله (۱۸ – ۵۷) ضریب فرنل برای انعکاس قطبش s، معادله (۱۸ – ۱۵)، به صورت زیر در می‌آید:

$$\hat{r}_{12s}=\frac{n_1\cos\theta_1-iq}{n_1\cos\theta_1+iq} \qquad (18-15)$$

برای هر مقدار $\theta_1>\theta_C$، صورت این کسر مزدوج مختلط مخرج آن است. بنابراین $\hat{r}_{12s}$ به شکل زیر است:

$$\hat{r}_{12s}=\frac{z^*}{z}\Rightarrow\hat{r}^*_{12s}=\frac{z}{z^*} \qquad (18-59)$$

در نتیجه

$$R_s=\left|\hat{r}_{12s}\right|^2=\hat{r}_{12s}\,\hat{r}^*_{12s}=1 \qquad (18-60)$$

در حالت مختلط T را محاسبه نکردیم، ولی پایستگی انرژی ایجاب می‌کند که هنگامی که $R=1$ است، $T=0$ باشد. از طرفی دیگر، ضرایب انتقال فرنل ($\hat{t}_{12}$ها) صفر نیستند؛ در محیط ۲ میدانهای B,Eی غیر صفر وجود دارند. با $p=0$ در معادله (۱۸ – ۵۰) داریم:

$$N=n_1\sin\theta_1=n_2(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_C}) \qquad (18-61)$$

ضریب شکست حقیقی محیط ۲، یعنی N، هنگامی که θ_1 از θ_c تا $\frac{\pi}{2}$ افزایش می‌یابد از n_2 تا n_1 تغییر می‌کند:

$$n_2\le N\le n_1 \qquad (18-62)$$

از معادله (۱۸ – ۵۱) به ازای $p=0$ و $N\neq 0$ برای هر زاویه فرود $\theta_1\ge\theta_c$ داریم

$$\cos\Theta=0 \qquad (18-63)$$

یعنی k_{2z} همواره با مرز موازی است و در نتیجه انرژی در محیط ۲ عمود بر مرز جریان ندارد و با توجه به اینکه k_{2i} بر مرز عمود است. سطوح فاز ثابت بر مرزی عمودند و سطوح دامنه ثابت با سطح مرزی موازی‌اند. این امواج مشهور به امواج محو شونده هستند.

موج محو شونده در جهت عمود بر مرز تضعیف می‌شود و طول تضعیف آن $\delta=\frac{1}{k_{2i}}$ است و برابر است با:

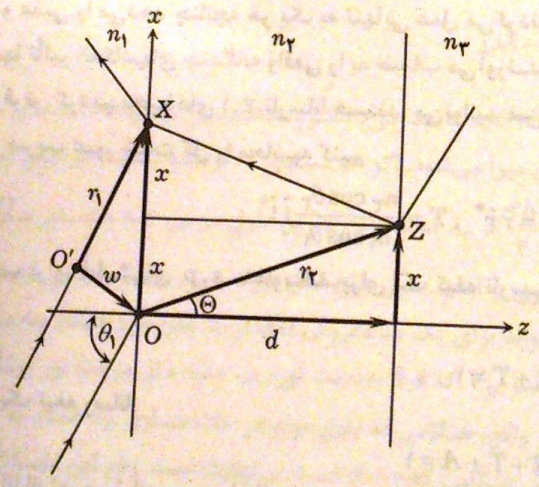
$$\delta=\frac{C}{wq}=\frac{C}{n_2w}\frac{1}{\sqrt{(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_c})^2-1}} \qquad (18-64)$$

و با وارد کردن طول موج، $\frac{\lambda_2}{2\pi}=\frac{C}{Nw}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\delta=\frac{\lambda_2}{2\pi\sqrt{1-(\frac{\sin\theta_c}{\sin\theta_1})^2}} \qquad (18-65)$$

تا هنگامی که θ_1 از θ_c بزرگتر باشد، δ یک عدد حقیقی است و موج با عمق درون محیط ۲ به‌طور نمایی افت می‌کند. با کم شدن زاویه فرود، طول تضعیف زیاد می‌شود و در زاویه بحرانی به بی‌نهایت می‌رسد. بنابراین، در این زاویه انتشار معمولی بدون تضعیف امکان‌پذیر می‌شود و به جای موج محو شونده، موج شکستی به درون محیط ۲ انتشار می‌یابد. از طرفی دیگر، هنگامی که θ_1 افزایش یافته و به $\frac{\pi}{2}$ میل کند، δ به $\frac{\lambda_2}{2\pi\cos\theta_c}$ میل می‌کند که برای شیشه به هوا مقدار آن $\frac{\lambda_2}{4/68}$ است. هنگامی که θ_1 تا θ_c افزایش می‌یابد، R و θ_2 افزایش می‌یابند، در θ_c داریم، $R=1$ و $\theta_2=\frac{\pi}{2}$. هنگامی که θ_1 به مقادیر بیش از θ_c افزایش می‌یابد، R برابر (۱) باقی می‌ماند و زاویه حقیقی شکست برابر با $\frac{\pi}{2}$ باقی می‌ماند، ولی نقوذ بی نهایت در محیط ۲ به تدریج کاهش می‌یابد و به کسری از طول موج می‌رسد. در عین حال سرعت فاز و طول موج در محیط ۲ از مقادیر مشخصه مربوط به محیط ۲ به مقادیر مربوط به محیط ۱ کاهش می‌یابند.

بازتاب و تراگسیل توسط یک لایه نازک: تداخل



دو موج فرودی که بر سطح موج تخت در محیط ۱ عمودند به سطح جلویی محیط ۲ برخورد می‌کنند. بخشی از یکی از آنها در X باز می‌تابد؛ بخشی از آن دیگری در O می‌شکند سپس بخشی از آن از سطح عقبی در Z باز می‌تابد و بخشی از آن در X می‌شکند تا در محیط ۱ مجدداً بیرون بیاید و با پرتو اول ترکیب شود. چون فاز در دو نقطه O و O' در روی سطح موج یکسان است، باید اختلاف فاز بین دو مسیر $O'X$ و OZX را محاسبه کنیم. چنانچه محیط ۲ رسانا باشد

PowerEn.ir

این محاسبات مشکل‌تر نخواهد بود و لذا ما فرض می‌کنیم که زاویه شکست Θ است، برای محیط نارسانا $\Theta = \theta_2$ اختلاف فاز عبارت است از:

$$\hat{\beta} = 2\vec{k}_2 . \vec{r}_2 - \vec{k}_1 . \vec{r}_1 \qquad (۱۸-۶۶)$$

با توجه به شکل و استفاده از قانون اسنل داریم:

$$\hat{\beta} = 2d\frac{w}{C}(p + iq) \qquad (۱۸-۶۷)$$

قسمت حقیقی $\hat{\beta}$ انتقال فاز حقیقی را به‌دست می‌دهد و قسمت موهومی $\hat{\beta}$ به تضعیف ناشی از دو بار پیمودن تیغه می‌انجامد.

برای جمع کردن تمام سهمهای دخیل در ضریب بازتاب دامنه کل ($\hat{r}$) از ضرایب فرنل برای هر یک از مرزها همراه با انتقال فاز $\hat{\beta}$ استفاده می‌کنیم. ضرایب فرنل برای قطبشهای s, p متفاوت‌اند، ولی فعلاً ما شاخصهای s, p را حذف می‌کنیم، ضمن آنکه به خاطر می‌سپاریم که دو حالت قطبش را باید جداگانه بررسی کنیم. از شکل بالا دیده می‌شود که

$$\hat{r} = \hat{r}_{12} + \hat{t}_{12}\hat{r}_{23}\hat{t}_{21}e^{i\hat{\beta}} + \hat{r}_{23}\hat{r}_{21}\hat{r}_{23}\hat{t}_{21}e^{2i\beta} + \dots \qquad (۱۸-۶۸)$$

$$= \hat{r}_{12} + \hat{t}_{12}\hat{r}_{23}\hat{t}_{21}e^{i\hat{\beta}}\left[1 + \hat{r}_{21}\hat{r}_{23}e^{i\hat{\beta}} + (\hat{r}_{21}\hat{r}_{23}e^{i\hat{\beta}})^2 + \dots\right]$$

$$\Rightarrow \hat{r} = \frac{\hat{r}_{12} + \hat{r}_{23}e^{i\hat{\beta}}}{1 + \hat{r}_{12}\hat{r}_{23}e^{i\hat{\beta}}}$$

با محاسباتی مشابه، دامنه کل انتقال یافته به محیط ۳ به‌دست می‌آید:

$$\hat{t} = \frac{\hat{t}_{12}\hat{t}_{23}e^{\frac{1}{2}i\hat{\beta}}}{1 + \hat{r}_{12}\hat{r}_{23}e^{i\hat{\beta}}} \qquad (۱۸-۶۹)$$

توجه کنید که صورتهای کسرها در دو معادله بالا فقط اثر سطوح جلویی و عقبی را می‌دهد چنانچه هر یک به تنهایی عمل می‌کردند، و مخرجها تأثیر انعکاسهای چندگانه واقعی را به حساب می‌آورند. از آنجا که فرض کردیم محیط‌های ۱، ۳ نارسانا هستند، می‌توانیم ضریب بازتاب و ضریب عبور شدت کل را محاسبه کنیم.

$$R = \hat{r}\hat{r}^* \ , \ T = \frac{n_3\cos\theta_3}{n_1\cos\theta_1}\hat{t}\hat{t}^* \qquad (۱۸-۷۰)$$

این ضرایب برای قطبشهای s, p متفاوت‌اند. برای یک تیغه نارسانا داریم:

$$R + T = 1 \qquad (۱۸-۷۱)$$

ولی برای یک تیغه رسانا

$$R + T + A = 1 \qquad (۱۸-۷۲)$$

زیرا در رسانا انرژی می‌تواند به وسیله گرمایش ژول جذب شود.

ضریب انتقال T متناسب است با $\hat{t}\hat{t}^*$ و $\hat{t}\hat{t}^*$ متناسب است با

$$e^{i\frac{\hat{\beta}}{2}}e^{-i\frac{\hat{\beta}^*}{2}} = e^{\frac{i(\hat{\beta}-\hat{\beta}^*)}{2}} = e^{-2d(\frac{w}{C})q} \qquad (۱۸-۷۳)$$

در فرود عمودی، $q = k$، بنابراین T حاوی ضریب زیر است

$$e^{-2\frac{d}{\delta}} \qquad (۱۸-۷۴)$$

که در آن $\delta = \frac{C}{kw}$ عمق پوسته است.

هنگامی که این عامل نهایی کوچک است، مخرج در معادله‌های (۱۸-۶۸) و (۱۸-۶۹) تقریباً ۱ است.

برای اجسام نارسانا $q = 0$ (به جز در مورد بازتاب کلی) بنابراین تضعیفی در اثر این عامل وجود ندارد، ولی بازهم معادلات، بعضی اثرهای جالب را پیشگویی می‌کنند. برای حالتی که β و تمام ضرایب فرنل حقیقی باشند، داریم:

$$R = \frac{n_1^2 + n_2^2 + 2n_1n_2\cos\beta}{1 + n_1^2n_2^2 + 2n_1n_2\cos\beta} \qquad (۱۸-۷۵)$$

در تابش عمودی داریم:

$$n_2 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, n_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}, \beta = 2d\frac{w}{c}n_2 \qquad (۱۸-۷۶)$$

جالب‌ترین ویژگی این نتیجه آن است که R می‌تواند از ضریب بازتاب سطح جلویی کوچکتر باشد. این اثر تنها به دلیل تداخل مخرب می‌تواند رخ بدهد. در واقع چنانچه ماده‌ای بیابیم که برای آن $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ باشد، کمینه مقدار R را می‌توانیم به صفر برسانیم. اگر n_2 بزرگتر از n_1 و n_3 باشد، R بین کمینه‌ای که برابر با n_{12}^2 است و بیشینه‌ای که از $n_{12}^2 n_{23}^2$ بزرگتر است تغییر می‌کند. طول موجی که به ازای آن کمینه یا بیشینه رخ می‌دهد به ضخامت لایه (d) بستگی دارد. اگر ضخامت از یک نقطه به نقطه دیگر پوسته تغییر کند، طول موجی که به ازای آن ضریب بازتاب بیشینه است نیز تغییر خواهد کرد.

در لایه‌های نارسانا چنانچه n_2 کوچکتر از n_1 باشد، اثر جالب دیگری نیز رخ می‌دهد. این همان موردی است که چنانچه تنها یک مرز وجود داشته باشد، به بازتاب کلی منجر می‌شود. در ابتدا ممکن است حدس بزنیم که چنانچه تمام انرژی باز می‌تابد وجود مرز دوم نباید تفاوتی ایجاد کند. ولی، این حدس غلط است. میدان همواره در محیط ۲ به عمق متوسط δ نفوذ می‌کند. مرز دوم بازتاب کامل را از بین می‌برد و یک موج انتقالی وجود خواهد داشت با $T = 1 - R$. این اثر را بازتاب کلی تضعیف شده می‌نامند. هرچند که n_1، n_2 و n_3 حقیقی هستند، ولی هنگامی که $\theta_1 > \theta_c$ باشد $\hat{\theta}_2$ مختلط است و نتیجتاً ضرایب فرنل مختلط خواهد بود. برای قطبش s به دست آورده بودیم:

$$\hat{r}_{12} = \frac{n_1\cos\theta_1 - iq}{n_1\cos\theta_1 + iq} \qquad (۱۸-۷۷)$$

که در آن

$$q = n_2\sqrt{(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_c})^2 - 1} = \sqrt{(n_1\sin\theta_1)^2 - n_2^2} \qquad (۱۸-۷۸)$$

با نوشتن $\hat{r}_{12}$ به صورت قطبی $\hat{r}_{12} = |\hat{r}_{12}|e^{i\alpha}$ دیدیم که $|\hat{r}_{12}| = 1$. بنابراین

$$r_{12} = e^{i\alpha} \qquad (۱۸-۷۹)$$

که در آن

PowerEn.ir

$$\tan\alpha=\frac{\mathrm{Im}(\hat{r}_{12})}{\mathrm{Re}(\hat{r}_{12})}=\frac{-2n_1\cos\theta_1 q}{(n_1\cos\theta_1)^2-q^2} \qquad (18-80)$$

برای سادگی فرض کنیم که محیط (۳) با محیط (۱) یکسان است، آنگاه $\hat{r}_{23}=\hat{r}_{21}$ و چون $\hat{r}_{21}=-\hat{r}_{12}$

$$\hat{r}_{23}=-\hat{r}_{12}=-e^{i\alpha} \qquad (18-81)$$

و در معادله (۱۸-۵۷) یافتیم که $p=0$، لذا $\beta=i2dq(\frac{w}{C})$ موهومی محض است. بنابراین می‌نویسیم:

$$e^{i\hat{\beta}}=e^{-\gamma} \quad \gamma=2dq(\frac{w}{c})=2\frac{d}{\delta} \qquad (18-82)$$

$$\hat{r}=\frac{e^{i\alpha}(1-e^{-\gamma})}{1-e^{2i\alpha}e^{-\gamma}}$$

و

$$R=\hat{r}\hat{r}^*=\frac{(1-e^{-\gamma})^2}{1+e^{-2\gamma}-2e^{-\gamma}\cos2\alpha}$$

$$T=1-R=\frac{2(1-\cos2\alpha)e^{-\gamma}}{1+e^{-2\gamma}-2e^{-\gamma}\cos2\alpha}$$

اگر γ زیاده از حد کوچک نباشد، داریم:

$$T\approx2(1-\cos2\alpha)e^{\frac{-2d}{\delta}} \qquad (18-83)$$

همچنین توجه کنید که δ با λ متناسب است، بنابراین انعکاس کلی تضعیف شده را با میکروموجها در مقیاس بزرگتری می‌توان مشاهده کرد.

انتشار بین صفحات رسانای موازی

هدایت امواج در موجبرها مسئله دیگری است که می‌توانیم آن را با بررسی تداخل میان موج فرودی و موج بازتابیده بررسی کنیم. در اینجا ما با انتشار موج در محیطی دی‌الکتریک (مثلاً هوا) سروکار داریم که با سطوحی رسانا محصور شده است. موجبرهای میکروموجها کاربردی از این مسئله‌اند.برای ساده شدن مطلب فرض می‌کنیم که رسانندگی فلز به طور ایده‌آل بی‌نهایت است. بی‌نهایت بودن g بدان معناست که $\mathbf{K}_i$ برای فلز بی‌نهایت است که این خود بدان معناست که $\hat{n}_2$ در معادله‌های (۱۸-۲۱) بی‌نهایت است. بنابراین برای بازتاب از یک سطح رسانای کامل در هر زاویه فرودی $\hat{r}_{12s}=-1$ و $\hat{r}_{12p}=+1$.

امواجی را درنظر می‌گیریم که با محور y زاویه θ می‌سازند. چنین امواجی در $g=b$ به سطح کاملاً رسانا برخورد می‌کنند و سپس به صورت امواجی که بردارهای انتشار آنها با محور منفی y زاویه θ می‌سازند، باز می‌تابند. هنگامی که این امواج در سطح رسانا در $y=0$ برای بار دوم بازتابیده می‌شوند دوباره به صورت امواج نوع اول در می‌آیند.

میدان الکتریکی در ناحیه بین دو صفحه رسانا در حالت TE (برای قطبش s میدان E موازی محور x است) با معادله زیر داده می‌شود:

$$\vec{E}=\hat{i}\Big[E_1e^{i[k(y\cos\theta+z\sin\theta)-wt]}+E_1'e^{i[k(-y\cos\theta+z\sin\theta)-wt]}\Big] \qquad (18-84)$$

این میدان الکتریکی باید در $y=0$ صفر شود، زیرا E_t در مرز یک رسانای کامل صفر می‌شود. واضح است که این شرط در صورتی به ازای تمام مقادیر t,z صادق است که $E_1=-E_1'=E$.

علاوه بر این E باید در $y=b$ به ازای تمام مقادیر t,z صفر شود. این الزام، شرط زیر را تحمیل می‌کند:

$$kb\cos\theta=n\pi \qquad (18-85)$$

که در آن n یک عدد درست است. بنابراین فرکانس wی مفروض $k=\frac{w}{c}$، و زاویه‌ای که امواج با محور y می‌سازند با معادله بالا مشخص می‌شود. چنانچه این زاویه مشخص باشد، سرعت ظاهری در امتداد z برابر با $V_p=\frac{C}{\sin\theta}$ است، که همواره بزرگتر از سرعت نور در خلاء است (تناقض ظاهری)

تغییرات میدان الکتریکی را در جهتهای z,y برحسب طول موجهایی به صورت زیر بیان می‌شود، این طول موجها عبارتند از:

$$\lambda_g=\frac{2\pi}{k\sin\theta}=\frac{\lambda_0}{\sin\theta}(\lambda_0=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi C}{w}) \qquad (18-86)$$

برای جهت z و

$$\lambda_C=\frac{2\pi}{k\cos\theta}=\frac{\lambda_0}{\cos\theta} \qquad (18-87)$$

برای جهت y، بنابراین:

$$\vec{E}=\hat{i}E_0\sin\frac{2\pi y}{\lambda_c}e^{i\left[(\frac{2\pi z}{\lambda_g})-wt\right]} \qquad (18-88)$$

از معادلات (۱۸-۸۶)،(۱۸-۸۷) مستقیماً نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{\lambda_g^2}+\frac{1}{\lambda_c^2}=\frac{1}{\lambda_0^2} \qquad (18-89)$$

اگر $\lambda_0>2b$ باشد، موج الکترومغناطیسی در جهت z به‌جای منتشر شدن میرا می‌شود. اگر n مساوی ۲ گرفته شود، در این صورت $\lambda_c=\frac{2b}{2}=b$ است و بزرگترین طول موجی که منتشر می‌شود مساوی b است. طول موج قطع بزرگترین طول موجی است که می‌تواند برای یک مد مفروض (مقدار n مفروض) انتشار بیابد.

سرعت V_p که قبلاً به‌دست آوردیم، همواره از سرعت نور بیشتر است و در واقع، هنگامی که طول موج در خلاء مساوی λ_c است، به عبارت دیگر، هنگامی که $\theta=0$ است، بی‌نهایت است. رفع این اشکال بدین ترتیب است که انرژی با سرعتی کمتر از سرعت نور در طول موجبر انتشار می‌یابد، یعنی، با سرعتی که به سرعت گروه مشهور است. علامتها با سرعت گروه انتقال می‌یابند، نه با سرعت فاز.

از تقسیم بردار پوئین تینگ به چگالی انرژی می‌توان سرعت انتشار انرژی را به‌دست آورد.

$$V_p=\frac{2\pi}{\varepsilon_0\mu_0 w\lambda_g}=\frac{2\pi C^2}{w\lambda_g}=C\frac{\lambda_0}{\lambda_g} \qquad (18-90)$$

PowerEn.ir

با توجه به معادله (۱۸-۸۶) معلوم است که λ_g از λ_0 بزرگتر است، بنابراین V_g از C کوچکتر است.

با توجه به معادله (۱۸-۸۶)، $\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sin\theta}$، در معادله (۱۸-۹۰) خواهیم داشت:

$$V_g = C\sin\theta \qquad (۱۸-۹۱)$$

و قبلاً مشاهده کردیم که:

$$V_p = \frac{C}{\sin\theta} \qquad (۱۸-۹۲)$$

بنابراین:

$$V_g V_p = C^2 \qquad (۱۸-۹۳)$$

این نتیجه‌ای است که عموماً برای انتشار در موجبرها صادق است.

برای یک موجبر مکعب مستطیل شکل که در آن $a>b$ است، درمد TE_{mn} داریم:

$$\frac{1}{\lambda_c^2} = (\frac{m}{2a})^2 + (\frac{n}{2b})^2$$

معمولاً λ_0 را به مقادیری محدود می‌کنند که تنها مد T_{E_1} بتواند انتشار بیابد.

برای امواج تختی که تضعیف می‌شوند یا در موجبری هدایت می‌شوند (و همچنین برای امواج کروی) در روی سطح فاز ثابت، دامنه الزاماً ثابت نیست. چنین امواجی ناهمگن نامیده می‌شوند. بردار پوئین تینگ برای این امواج پیچیده‌تر از امواج تخت همگنی است که در محیطی دی الکتریک انتشار می‌یابند.

مسائل فصل هیجدهم

۱۸ - ۱ - (الف) برای موجی با قطبش s که از هوا تحت زاویهٔ بروستر، $\theta_1=\theta_B$، بر روی یک دی‌الکتریکی فرود می‌آید، ضریب بازتاب فرنل را محاسبه کنید. (ب) اگر $n=1/5$ باشد، ضریب بازتاب چه مقدار خواهد بود؟

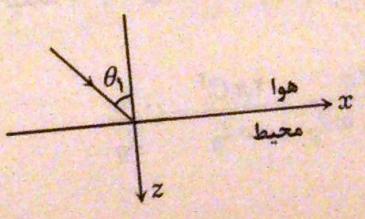
حل:

محیط (۱) هوا: $n_1=1$ ، $n_2=1/5$

$$\theta_1=\theta_B \ , \quad \theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_B+\theta_2=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow r_{12s}\neq 0 \ , \quad r_{12p}=0$$

فصل مشترک دو محیط صفحهٔ $z=0$ است.



بردارهای موج:

$$\hat{E}_1 = \hat{E}_{1s} e^{-i(\omega t-\vec{k}_1.\vec{r})} \qquad \vec{k}_1 = k_1\hat{u}_1$$

$$\hat{E}'_1 = \hat{E}'_{1s} e^{-i(\omega t-\vec{k}'_1.\vec{r})} \qquad \vec{k}'_1 = k_1\hat{u}'_1$$

$$\hat{E}_2 = \hat{E}_{2s} e^{-i(\omega t-\vec{k}_2.\vec{r})} \qquad \vec{k}_2 = k_2\hat{u}_2$$

چون باید در شرایط مرزی صدق کند، باید موج انتقالی و بازتابی با موج فرودی هم فرکانس و هم فاز باشند. در مرز دو محیط ما دیگر یک موج داریم:

$$\vec{k}_1.\vec{r} = \vec{k}'_1.\vec{r} = \vec{k}_2.\vec{r}$$

چون این رابطه باید فقط در مرز برقرار باشد:

$$(\hat{n}\times\hat{n}\times\vec{r}) = \hat{n}(\hat{n}.\vec{r}) - \vec{r}$$

$$\vec{r} = \hat{n}(\hat{n}.\vec{r}) - (\hat{n}\times\hat{n}\times\vec{r})$$

$\vec{r}$: بردار اختیاری بر روی مرز است.

$\hat{n}$: مؤلفه عمود بر مرز است و در جهت z است.

$$\vec{k}_1.\vec{r} = -\vec{k}_1.(\hat{n}\times\hat{n}\times\vec{r}) = -(\vec{k}_1\times\hat{n}).(\hat{n}\times\vec{r}) \ , \cdots$$

$$\vec{k}_1\times\hat{n} = \vec{k}_2\times\hat{n} = \vec{k}'_1\times\hat{n}$$

صفحهٔ فرودی: صفحه‌ای است که با u'_1 و $\hat{n}$ تعریف می‌شود. بردار یکهٔ عمود بر این صفحه $u'_1\times\hat{n}$ است. پس k_1 و k_2 و k'_1 و $\hat{n}$ همه هم صفحه هستند و در صفحهٔ xz قرار دارند.

$$k_1\sin\theta_1 = k'_1\sin(\pi-\theta'_1) \xrightarrow{k_1=k'_1} \theta_1=\theta'_1$$

$$k_1\sin\theta_1 = k_2\sin\theta_2 \xrightarrow{k=\frac{n\omega}{c}} n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$$ (قانون اسنل)

جداسازی مؤلفه‌های عمودی و مماسی دامنهٔ میدان:

$$(\hat{n}\times\hat{n}\times\hat{E}) = \hat{n}(\hat{n}.\hat{E}) - \hat{E}$$

$$\hat{E} = (\hat{n}\times\hat{n}\times\hat{E}) - \hat{n}(\hat{n}.\hat{E}) \ , \quad \hat{B} = (\hat{n}\times\hat{n}\times\hat{B}) - \hat{n}(\hat{n}.\hat{B})$$

شرایط مرزی: ۱- پیوستگی مؤلفهٔ مماسی میدان الکتریکی:

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\hat{n}\times\hat{n}\times[\hat{E}_1+\hat{E}'_1] = \hat{n}\times\hat{n}\times\hat{E}_2 \qquad (۱)$$

۲- پیوستگی مؤلفهٔ مماسی میدان مغناطیسی در مرز:

$$\hat{n}\times\hat{n}\times(\hat{B}_1+\hat{B}'_1) = \hat{n}\times\hat{n}\times\hat{B}_2 \qquad (۲)$$

$$\hat{B} = \frac{n}{c}\hat{u}\times\hat{E} \qquad (۳)$$

برای قطبش s :

$$(۱) \Rightarrow \hat{E}_{1s}+\hat{E}'_{1s} = \hat{E}_{2s}$$

$$(۲),(۳) \Rightarrow \hat{n}\times[\frac{n_1}{c}\hat{u}_1\times\hat{E}_{1s} + \frac{n_1}{c}\hat{u}'_1\times\hat{E}'_{1s}]$$

$$= \hat{n}\times[\frac{n_2}{c}\hat{u}_2\times\hat{E}_{2s}]$$

$$n_1[\hat{n}\times\hat{u}_1\times\hat{E}_{1s} + \hat{n}\times\hat{u}'_1\times\hat{E}'_{1s}] = n_2[\hat{n}\times\hat{u}_2\times\hat{E}_{2s}]$$

$$n_1[\hat{u}_1(\hat{n}\times\hat{E}_{1s}) - \hat{E}_{1s}(\hat{n}\times\hat{u}_1) + \hat{u}'_1(\hat{n}.\hat{E}'_{1s}) - \hat{E}'_{1s}(\hat{n}.\hat{u}'_1)]$$

$$= n_2[\hat{u}_2(\hat{n}.\hat{E}_{2s}) - (\hat{n}.\hat{u}_2)\hat{E}_{2s}] \Rightarrow$$

$$-n_1\hat{E}_{1s}\cos\theta_1 + n_1\hat{E}'_{1s}\cos\theta_1 = -n_2\hat{E}_{2s}\cos\theta_2$$

PowerEn.ir

اگر E در جهت p قطبش داشته باشد و u ، s و p بر هم عمود باشند، چون E، B و u بر هم عمودند، بنابراین B در s قطبش دارد.

$$(۲) \Rightarrow \hat{B}_{۱s} + \hat{B}'_{۱s} = \hat{B}_{۲s}$$

$$\hat{n}\times[\frac{c}{n_۱}\hat{u}_۱\times\hat{B}_{۱s} + \frac{c}{n_۱}\hat{u}'_۱\times\hat{B}'_{۱s}] = \hat{n}\times[\frac{c}{n_۲}\hat{u}_۲\times\hat{B}_{۲s}]$$

$$\frac{۱}{n_۱}[\hat{n}\times\hat{u}_۱\times\hat{B}_{۱s} + \hat{n}\times\hat{u}'_۱\times\hat{B}'_{۱s}] = \frac{۱}{n_۱}[\hat{n}\times\hat{u}_۲\times\hat{B}_{۲s}]$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{n_۱}[\hat{u}_۱(\hat{n}\times\hat{B}_{۱s}) - \hat{B}_{۱s}(\hat{n}.\hat{u}_۱) + \hat{u}'_۱(\hat{n}.\hat{B}'_{۱s}) - \hat{B}'_{۱s}(\hat{n}\times\hat{u}'_۱)]$$

$$= \frac{۱}{n_۲}[\hat{u}_۲(\hat{n}\times\hat{B}_{۲s}) - \hat{B}_{۲s}(\hat{n}.\hat{u}_۲)]$$

$$-\frac{۱}{n_۱}\hat{B}_{۱s}\cos\theta_۱ + \frac{۱}{n_۱}\hat{B}'_{۱s}\cos\theta_۱ = \frac{-۱}{n_۲}\hat{B}_{۲s}\cos\theta_۲$$

$$(\hat{B}_{۱s} + \hat{B}'_{۱s} = \hat{B}_{۲s}) \Rightarrow \frac{-۱}{n_۱}\hat{B}_{۱s}\cos\theta_۱ + \frac{۱}{n_۱}\hat{B}'_{۱s}\cos\theta_۱$$

$$= -\frac{۱}{n_۲}(\hat{B}_{۱s} + \hat{B}'_{۱s})\cos\theta_۲ \Rightarrow$$

$$(\frac{-۱}{n_۱}\cos\theta_۱ + \frac{۱}{n_۲}\cos\theta_۲)\hat{B}_{۱s} = (-\frac{۱}{n_۱}\cos\theta_۱ - \frac{۱}{n_۲}\cos\theta_۲)\hat{B}'_{۱s}$$

$$\frac{-n_۲\cos\theta_۱ + n_۱\cos\theta_۲}{n_۱n_۲}\hat{B}_{۱s} = -\frac{n_۲\cos\theta_۱ + n_۱\cos\theta_۲}{n_۱n_۲}\hat{B}'_{۱s}$$

$$\frac{\hat{B}'_{۱s}}{\hat{B}_{۱s}} = \frac{n_۲\cos\theta_۱ - n_۱\cos\theta_۲}{n_۲\cos\theta_۱ + n_۱\cos\theta_۲} = r_{۱۲}p$$

$$n_۱\sin\theta_۱ = n_۲\sin\theta_۲ \quad , \quad n_۱ = ۱ \quad , \quad n_۲ = n$$

$$\Rightarrow \sin\theta_۱ = n\sin\theta_۲$$

$$\sin\theta_۱ = \sin(\frac{\pi}{۲} - \delta) = \cos\delta \cong ۱ \qquad (\delta \to ۰)$$

$$\cos\theta_۱ = \cos(\frac{\pi}{۲} - \delta) = \sin\delta \cong \delta \qquad (\delta \to ۰)$$

$$\cos\theta_۲ = \sqrt{۱-\sin^۲\theta_۲} = \sqrt{۱-\frac{\sin^۲\theta_۱}{n^۲}} = \sqrt{۱-\frac{۱}{n^۲}}$$

$$r_{۱۲}p = \frac{n\delta - \sqrt{۱-\frac{۱}{n^۲}}}{n\delta + \sqrt{۱-\frac{۱}{n^۲}}} \Rightarrow R_p = |r_{۱۲}p|^۲ = [\frac{n\delta - \sqrt{۱-\frac{۱}{n^۲}}}{n\delta + \sqrt{۱-\frac{۱}{n^۲}}}]$$

$$= \frac{n^۲\delta^۲ + (۱-\frac{۱}{n^۲}) - ۲n\delta(\sqrt{۱-\frac{۱}{n^۲}})}{n^۲\delta^۲ + (۱-\frac{۱}{n^۲}) + ۲n\delta(\sqrt{۱-\frac{۱}{n^۲}})}$$

($\delta \to ۰$، از $\delta^۲$ صرفنظر می‌کنیم)

$$\cong \frac{-۲n\delta\sqrt{۱-\frac{۱}{n^۲}} + (۱-\frac{۱}{n^۲})}{(۱-\frac{۱}{n^۲}) + ۲n\delta(\sqrt{۱-\frac{۱}{n^۲}})} = \frac{-۲n\delta\sqrt{\frac{n^۲-۱}{n^۲}} + (\frac{n^۲-۱}{n^۲})}{(\frac{n^۲-۱}{n^۲}) + ۲n\delta(\sqrt{\frac{n^۲-۱}{n^۲}})}$$

$$= \frac{-۲\delta\sqrt{k-۱} + (\frac{k-۱}{k})}{(\frac{k-۱}{k}) + ۲\delta\sqrt{k-۱}} = \frac{۱-\frac{۲\delta k\sqrt{k-۱}}{k-۱}}{۱+\frac{۲\delta k\sqrt{k-۱}}{k-۱}} = \frac{۱-\frac{۲\delta k}{\sqrt{k-۱}}}{۱+\frac{۲\delta k}{\sqrt{k-۱}}}$$

$$r_{۱۲s} = \frac{\hat{E}'_{۱s}}{\hat{E}_{۱s}} = ?$$

$$-n_۱\hat{E}_{۱s}\cos\theta_۱ + n_۱\hat{E}'_{۱s}\cos\theta_۱ = -n_۲(\hat{E}_{۱s} + \hat{E}'_{۱s})\cos\theta_۲$$

$$(-n_۱\cos\theta_۱ + n_۲\cos\theta_۲)\hat{E}_{۱s} = (-n_۱\cos\theta_۱ - n_۲\cos\theta_۲)\hat{E}'_{۱s}$$

$$\frac{\hat{E}'_{۱s}}{\hat{E}_{۱s}} = \frac{n_۱\cos\theta_۱ - n_۲\cos\theta_۲}{n_۱\cos\theta_۱ + n_۲\cos\theta_۲} = r_{۱۲s} \qquad \theta_۱ = \theta_B$$

هوا: $n_۱ = ۱$ ، $n_۲ = n$ ، $\theta_۱ + \theta_۲ = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \theta_۲ = \frac{\pi}{۲} - \theta_B$

$$n_۱\sin\theta_B = n_۲\cos\theta_B \Rightarrow \tan\theta_B = \frac{n_۲}{n_۱} = \frac{n}{۱}$$

$$r_{۱۲} = \frac{\cos\theta_B - n\sin\theta_B}{\cos\theta_B + n\sin\theta_B} = \frac{۱-n\tan\theta_B}{۱+n\tan\theta_B} = \frac{۱-n^۲}{۱+n^۲}$$

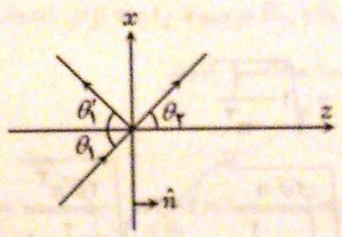
$$if \quad n = ۱/۵ \Rightarrow$$

$$R = |r_{۱۲}|^۲ = (\frac{۱-(۱/۵)^۲}{۱+(۱/۵)^۲})^۲ \approx ۱۴/۸\% \quad \text{(ضریب انعکاس)}$$

۱۸ - ۲ - موجی با قطبش p از هوا بر روی سطح یک دی‌الکتریک تقریباً به طور خراشان، $\theta_۱ = \frac{۱}{۲}\pi - \delta$، فرود می‌آید. گرادیان منحنی $R_p(\theta_۱)$ را هنگامی که δ به صفر میل می‌کند، بر حسب ثابت دی‌الکتریک K پیدا کنید.

حل:

$$Rp = ? \quad r_{۱۲p} = ? \quad n_۲ = n \ , \ n_۱ = ۱ \ , \ \theta_۱ = \frac{\pi}{۲} - \delta \quad \text{(فرود خراشان)}$$



$$\vec{E}_۱ = \hat{E}_{۱p}\, e^{-i(\omega t - \vec{k}_۱.\vec{r})}$$

$$\vec{E}'_۱ = \hat{E}'_{۱p}\, e^{-i(\omega t - \vec{k}'_۱.\vec{r})}$$

$$\vec{E}_۲ = \hat{E}_{۲p}\, e^{-i(\omega t - \vec{k}_۲.\vec{r})}$$

بردارهای موج: $\vec{k}_۱ = k_۱\hat{u}_۱$ ، $\vec{k}'_۱ = k_۱\hat{u}'_۱$ ، $\vec{k}_۲ = k_۲\hat{u}_۲$

میدان‌های p موازی با صفحهٔ فرودی است. بردار یکهٔ صفحهٔ فرودی $\hat{u}_۱\times\hat{n}$ است. برای اعمال شرایط مرزی باید موج‌های انتقالی و بازتابی با موج فرودی هم فرکانس و هم فاز باشند:

$$\vec{k}_۱.\vec{r} = \vec{k}'_۱.\vec{r} = \vec{k}_۲.\vec{r} \quad \text{(فقط بر روی مرز)} \qquad \hat{n}\times\hat{n}\times\vec{r} = \hat{n}(\hat{n}.\vec{r}) - \vec{r}$$

$$-\vec{k}_۱.(\hat{n}\times\hat{n}\times\vec{r}) = -(\vec{k}_۱.\hat{n}).(\hat{n}.\vec{r})$$

$$\vec{k}_۱\times\hat{n} = \vec{k}'_۱\times\hat{n} = \vec{k}_۲\times\hat{n} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \hat{n}\ ,\ \vec{k}_۲\ ,\ \vec{k}'_۱\ ,\ \vec{k}_۱ & \text{هم صفحه هستند} \\ k_۱\sin\theta_۱ = k'_۱\sin\theta'_۱ \Rightarrow \theta_۱ = \theta'_۱ \\ k_۱\sin\theta_۱ = k_۲\sin\theta_۲ \Rightarrow n_۱\sin\theta_۱ = n_۲\sin\theta_۲ \end{cases}$$

$$(\hat{n}\times\hat{n}\times\hat{E}) = \hat{n}(\hat{n}.\hat{E}) - \hat{E} \quad , \quad \hat{B} = \hat{n}(\hat{n}.\hat{B}) - (\hat{n}\times\hat{n}\times\hat{B})$$

شرایط مرزی:

$$E_{۱t} = E_{۲t} \Rightarrow \hat{n}\times\hat{n}\times(\hat{E}_۱ + \hat{E}'_۱) = \hat{n}\times\hat{n}\times\hat{E}_۲ \qquad (۱)$$

$$B_{۱t} = B_{۲t} \Rightarrow \hat{n}\times\hat{n}\times(\hat{B}_۱ + \hat{B}'_۱) = \hat{n}\times\hat{n}\times\hat{B}_۲ \qquad (۲)$$

PowerEn.ir

$$=[1-\frac{2\delta k}{\sqrt{k-1}}]=[1+\frac{2\delta k}{\sqrt{k-1}}]^{-1}$$

چون $\delta \to 0$، بنابراین:

$$\cong[1-\frac{2\delta k}{\sqrt{k-1}}][1-\frac{2\delta k}{\sqrt{k-1}}]=[1-\frac{2\delta k}{\sqrt{k-1}}]^2$$

$$R_p \cong 1+\frac{4\delta^2 k^2}{k-1}-\frac{4\delta k}{\sqrt{k-1}} \cong 1-\frac{4\delta k}{\sqrt{k-1}}=1-\frac{4k(\frac{\pi}{2}-\theta_1)}{\sqrt{k-1}}$$

$$\frac{dR_p}{d\theta_1}=\frac{4k}{\sqrt{k-1}} \qquad (\delta \to 0)$$

۱۸ – ۳ – موجی با قطبش p از محیط شفافی با ثابت دی‌الکتریک K بر روی مرز هوا با زاویه‌ای اندکی کمتر از زاویهٔ حد، $\theta_1=\theta_c-\delta$، فرود می‌آید. به طور تقریبی R_p را به صورت تابعی از δ هنگامی که δ به صفر میل می‌کند به دست آورید، و نشان دهید که گرادیان منحنی $R_p(\theta_1)$ در θ_c بی‌نهایت است.

حل:

$$\theta_1=\theta_c-\delta$$

$$r_{12}p=\frac{n_2\cos\theta_1-n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1+n_1\cos\theta_2} \quad , \quad n_1=n \quad , \quad n_2=1 \Rightarrow$$

$$r_{12}p=\frac{\cos\theta_1-n\cos\theta_2}{\cos\theta_1+n\cos\theta_2}$$

$$R_p=\frac{\cos^2\theta_1+n^2\cos^2\theta_2-2n\cos\theta_1\cos\theta_2}{\cos^2\theta_1+n^2\cos^2\theta_2+2n\cos\theta_1\cos\theta_2}$$

$$\cos\theta_2=\sqrt{1-\sin^2\theta_2} \quad , \quad n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$$

$$\Rightarrow \sin\theta_2=n\sin(\theta_c-\delta)$$

$$\cos\theta_2=\sqrt{1-n^2\sin^2(\theta_c-\delta)}$$

$$\sin(\theta_c-\delta)=\sin\theta_c\cos\delta-\sin\delta\cos\theta_c$$

$$n_1\sin\theta_c=n_2\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1}=\frac{1}{n}$$

$$\cos\delta\cong 1 \quad , \quad \sin\delta\cong\delta$$

$$\cos\theta_2=\sqrt{1-n^2(\frac{1}{n}-\delta\cos\theta_c)^2}$$

$$=\sqrt{1-n^2(\frac{1}{n^2}-\delta^2\cos^2\theta_c-\frac{2\delta}{n}\cos\theta_c)}$$

$$=\sqrt{1-1-\delta^2n^2\cos^2\theta_c+2\delta n\cos\theta_c}\cong\sqrt{2\delta n\cos\theta_c}$$

$$\cos\theta_2=\sqrt{1-n^2\sin^2(\theta_c-\delta)}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta_2=1-n^2(\frac{1}{n}-\delta\cos\theta_c)^2$$

$$=1-n^2\left[\frac{1}{n^2}+\delta^2\cos^2\theta_c-\frac{2\delta}{n}\cos\theta_c\right]$$

$$=1-1-n^2\delta^2\cos^2\theta_c+2\delta n\cos\theta_c \to 0$$

از توانهای δ^1، δ^2 و ... صرفنظر کرده و توان $\sqrt{\delta}$ را نگه می‌داریم.

$$\cos\theta_1=\cos(\theta_c-\delta)=\cos\theta_c\cos\delta-\sin\theta_c\sin\delta=\cos\theta_c+\frac{1}{n}\delta$$

$$\cos^2\theta_1=\cos^2\theta_c+\frac{\delta^2}{n^2}-\frac{2\delta}{n}\cos\theta_c\cong\cos^2\theta_c$$

$$\cos\theta_1\cos\theta_2=[\cos\theta_c+\frac{\delta}{n}][\sqrt{2\delta n\cos\theta_c}]$$

$$\cong\cos\theta_c\sqrt{2\delta n\cos\theta_c}$$

$$R_p\cong\frac{\cos^2\theta_c+n^2(0)-2n(\cos\theta_c-\frac{\delta}{n})(\sqrt{2\delta n\cos\theta_c})}{\cos^2\theta_c+n^2(0)+2n(\cos\theta_c-\frac{\delta}{n})(\sqrt{2\delta n\cos\theta_c})}$$

$$=\frac{\cos^2\theta_c-2n\cos\theta_c\sqrt{2\delta n\cos\theta_c}}{\cos^2\theta_c+2n\cos\theta_c\sqrt{2\delta n\cos\theta_c}}$$

$$=\frac{1-2n\sqrt{\frac{2\delta n\cos^3\theta_c}{\cos^4\theta_c}}}{1+2n\sqrt{\frac{2\delta n\cos^3\theta_c}{\cos^4\theta_c}}}=\left[1-2n\sqrt{\frac{2\delta n}{\cos\theta_c}}\right]\left[1+2n\sqrt{\frac{2\delta n}{\cos\theta_c}}\right]^{-1}$$

$$\underline{x\ll 1}\left[1-2n\sqrt{\frac{2\delta n}{\cos\theta_c}}\right]^2$$

$$\underline{\text{بسط دوجمله‌ای}}\ [1-4n\sqrt{\frac{2\delta n}{\cos\theta_c}}]$$

$$\cos\theta_c=\sqrt{1-\sin^2\theta_c}$$

$$\sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1}=\frac{1}{n} \Rightarrow \cos\theta_c=\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$$

$$R_p\cong 1-4n\sqrt{\frac{2\delta n}{\cos\theta_c}}=1-4n\sqrt{\frac{2\delta n}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}}=1-4n\sqrt{\frac{2\delta n^2}{\sqrt{n^2-1}}}=$$

$$1-4n^2\sqrt{\frac{2\delta}{\sqrt{n^2-1}}}=1-4k\sqrt{\frac{2\delta}{\sqrt{k-1}}}$$

$$=1-4k\sqrt{\frac{2(\theta_c-\theta_1)}{\sqrt{k-1}}}(\theta_1=\theta_c-\delta)$$

$$\frac{dR}{d\theta_1}=\frac{4k}{\sqrt{k-1}}\left[\frac{(k-1)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2(\theta_c-\theta_1)}}\right]=\frac{2\sqrt{2}k}{\sqrt{k-1}}\frac{1}{\sqrt{\theta_c-\theta_1}}$$

$$\lim_{\theta_1\to\theta_c}\frac{dR}{d\theta_1}=\lim_{\theta_1\to\theta_c}\frac{2\sqrt{2}k}{\sqrt{k-1}}\frac{1}{\sqrt{\theta_c-\theta_1}}\to\infty$$

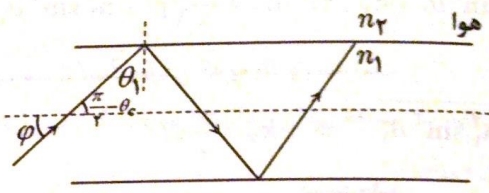
۱۸ – ۴ – فرض کنید ضریب شکست یک فیبر نوری $n=1/55$ است.

(الف) اگر فیبر با هوا احاطه شده باشد، بزرگترین زاویهٔ بین محور فیبر و پرتو نوری که بتواند در امتداد فیبر انتشار بیابد چقدر است؟

PowerEn.ir

(ب) اگر فیبر را روکشی با ضریب شکست ۱٫۵۳ احاطه کرده باشد، این زاویه چقدر است؟

حل:



باید θ_1 یعنی زاویه ورودی پرتو فرودی و خط قائم به سطح بزرگتر از θ_c باشد تا بازتابش کلی داشته باشیم، بنابراین φ_{max} زمانی است که $(\theta_1=\theta_c)$ باشد. اگر $\varphi>\varphi_{max} \Leftarrow \theta_1<\theta_c$ می‌شود و پرتو از سطح خارج می‌شود.

$$\theta_1=\theta_c \quad , \quad \varphi_{max}=\frac{\pi}{2}-\theta_c$$

$$if \quad n_2=1 \ , \ n_1\sin\theta_c=n_2\sin\theta_2 \Rightarrow \sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1}=\frac{1}{1/55}$$

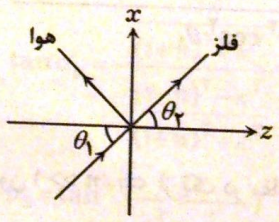
$$\Rightarrow \theta_c\cong 40^\circ$$

$$if \quad n_2=1/53 \ , \ \sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1}=\frac{1/53}{1/55} \Rightarrow \theta_c\cong 80/8^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi_{max}=\frac{\pi}{2}-\theta_c=9/2^\circ$$

۱۸ - ۵ - یک موج نوری با قطبش p در هوا از یک سطح فلزی بازمی‌تابد. (الف) با فرض آنکه $\cos\theta_2\cong 1$ (فرضی که غالباً صحیح است) R_p را محاسبه کنید. (ب) مقدار θ_1 را که در آن R_p کمینه می‌شود پیدا کنید. (ج) این مقدار θ_1 و R_p مربوط را به ازای $n=1$، $k=6$ (مقادیر مناسب برای آلومینیم) محاسبه کنید.

حل:



$$\hat r_{12p}=\frac{\hat n_2\cos\theta_1-n_1\cos\hat\theta_2}{\hat n_2\cos\theta_1+n_1\cos\hat\theta_2}$$

$$\cos\hat\theta_2\cong 1 \quad n_1=1 \ , \ \hat n_2=n+i\kappa$$

$$\hat r_{12p}=\frac{(n+i\kappa)\cos\theta_1-1}{(n+i\kappa)\cos\theta_1+1}=\frac{(n\cos\theta_1-1)+i\kappa\cos\theta_1}{(n\cos\theta_1+1)+i\kappa\cos\theta_1}$$

$$R_p=|\hat r_{12p}|^2=r^*_{12p}r_{12p}$$

$$=\frac{(n\cos\theta_1-1)-i\kappa\cos\theta_1}{(n\cos\theta_1+1)-i\kappa\cos\theta_1}\times\frac{(n\cos\theta_1-1)+i\kappa\cos\theta_1}{(n\cos\theta_1+1)+i\kappa\cos\theta_1}$$

$$=\frac{(n\cos\theta_1-1)^2+\kappa^2\cos^2\theta_1}{(n\cos\theta_1+1)^2+\kappa^2\cos^2\theta_1}=\frac{f(\theta_1)}{g(\theta_1)}$$

$$\frac{dR_p}{d\theta_1}=\frac{f'g-g'f}{g^2}=0$$

$$[2n(n\cos\theta_1-1)+2\kappa^2\cos^2\theta_1]g(\theta_1)$$

$$-[2n(n\cos\theta_1+1)+2\kappa^2\cos^2\theta_1]f(\theta_1)=0$$

$$n\cos\theta_1-1=A \qquad \kappa^2\cos\theta_1=C$$

$$n\cos\theta_1+1=B \qquad \kappa^2\cos\theta_1=D$$

$$[2nA+2C][B^2+D]-[2nB+2C][A^2+D]=0$$

$$2nAB^2+2CB^2+2nAD+2CD-2nBA^2-2nBD-2CA^2-2CD=0$$

$$nAD-nBD=nD(A-B)=-2nD=-2n\kappa^2\cos^2\theta_1$$

$$nAB^2-nBA^2=nAB[B-A]=2nAB=2n(n^2\cos^2\theta_1-1)$$

$$2CB^2-2CA^2=2C[B^2-A^2]$$

$$=2C[(n^2\cos^2\theta_1+1+2n\cos\theta_1)-(n^2\cos^2\theta_1+1-2n\cos\theta_1)]$$

$$=2C[+4n\cos\theta_1]=8n\kappa^2\cos^2\theta_1$$

$$8n\kappa^2\cos^2\theta_1-4n\kappa^2\cos^2\theta_1+4n^3\cos^2\theta_1-4n=0$$

$$4n\kappa^2\cos^2\theta_1+4n^3\cos^2\theta_1-4n=0 \Rightarrow \cos^2\theta_1=\frac{n}{n\kappa^2+n^3}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_1=\frac{1}{\sqrt{\kappa^2+n^2}} \ ,$$

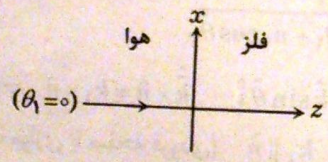
$$if \quad n=1 \ , \ \kappa=6 \Rightarrow \theta_1=\cos^{-1}()=80/53^\circ \ , \ R_p\cong 72\%$$

نکته: یک موج که با قطبش p از هوا به سطح فلز می‌خورد و منعکس می‌شود و با فرض $\cos\hat\theta_2\cong 1$، مقدار θ_1 که R_p به ازای آن Min می‌شود برابر است با:

$$\cos\theta_1=\frac{1}{\sqrt{\kappa^2+n^2}}$$

۱۸ - ۶ - موج تختی از هوا به طور عمود بر روی مرز تخت فلزی فرود می‌آید. فرض کنید فرکانس موج در گستره‌ای است که $n\cong k>>1$. (الف) از ضریب انتقال فرنل، $|E_2|^2$ را درست در داخل سطح فلز محاسبه کنید. (ب) اتلاف انرژی در واحد حجم را در نزدیکی سطح محاسبه کنید، و مقدار آن را برای حالتی که دامنهٔ فرودی $E_1=10\,V/cm$ و فرکانس $f=10^{10}\,Hz$ است، به دست آورید.

حل:



$$\theta_1=0 \ , \ n\cong k>>1 \ , \ n_1\sin\theta_1=\hat n_2\sin\hat\theta_2$$

$$\Rightarrow 0=\hat n_2\sin\hat\theta_2$$

$$\hat n_2\neq 0 \Rightarrow \sin\hat\theta_2=0 \Rightarrow \cos\hat\theta_2=\sqrt{1-\sin^2\hat\theta_2}=1$$

$$\hat t_{12s}=\hat t_{12p}=\frac{2n_1}{\hat n_2+n_1}=\frac{2}{n+i\kappa+1} \quad \text{(نوع قطبش اثری ندارد)}$$

$$|\hat t|^2=t^*t=\frac{2}{(n+1)-i\kappa}\times\frac{2}{(n+1)+i\kappa}=\frac{4}{(n+1)^2+\kappa^2}$$

$$\cong\frac{4}{n^2+\kappa^2}=\frac{2}{\kappa^2}$$

PowerEn.ir

$$|\hat{t}|^2=\frac{|E_2|^2}{|E_1|^2} \Rightarrow |E_2|^2\cong\frac{2}{\kappa^2}|E_1|^2$$

بنابراین از ضریب انتقال فرنل می‌توان $|E_2|^2$ را درست در داخل سطح فلز محاسبه کرد.

$$\hat{B}=\frac{n}{c}\hat{u}\times\hat{E} \Rightarrow \hat{B}=\frac{n}{c}\hat{E}$$

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H} \quad , \quad \vec{S}=EH\,\hat{u}$$

$$\Rightarrow S=E(\frac{n}{\mu_0 C}E)=\frac{n}{\mu_0 C}E^2=\frac{1}{2}\frac{n}{\mu_0 C}[E_p^2+E_s^2]$$

$\overline{S}_p=\frac{n}{2\mu_0 C}E_p^2$ ((متوسط زمانی بردار پوئینن تینگ (شار انرژی در واحد سطح))

مدت زمان پیمودن × (شارژ انرژی در واحد حجم): اتلاف توان در واحد حجم

$$\frac{\overline{S}}{\delta}\times\frac{\delta}{(\frac{c}{n})}=\frac{\frac{1}{2}\frac{n}{\mu_0 C}|E_2|^2}{\delta}\frac{\delta}{(\frac{c}{n})}=\frac{1}{2}\frac{n^2}{\mu_0 C^2}|E_2|^2$$

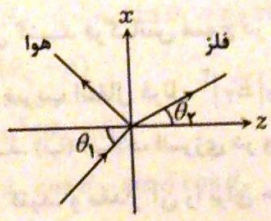
$$=\frac{1}{2}\frac{\kappa^2|E_2|^2}{\mu_0 C^2}\cong\frac{|E_1|^2}{\mu_0 C^2}$$

بنابراین اتلاف انرژی در واحد حجم = متوسط چگالی انرژی در n_2.

۱۸ - ۷ - موجی با فرکانسی در گسترهٔ اعتبار رابطهٔ هاگن-روبنز در هوا به طور مایل با زاویهٔ θ_1 بر روی سطح رسانایی فرود می‌آید. نشان دهید به جای معادلهٔ (۱۸-۶۰) روابط زیر را خواهیم داشت

$$A_s=\frac{2\cos\theta_1}{k} \qquad A_p=\frac{2}{k\cos theta_1}$$

حل:



$q\cong p\cong n\cong k>>1$ $A=1-R$ (تمام انرژی در رسانا جذب می‌شود)

$$\hat{r}_{12p}=\frac{\hat{n}_2\cos\theta_1-n_1\cos\hat{\theta}_2}{\hat{n}_2\cos\theta_1+n_1\cos\hat{\theta}_2}$$

$$\hat{\vec{k}}=\hat{k}\cos\hat{\theta}\,\hat{k}+\hat{k}\sin\hat{\theta}\,\hat{i} \qquad \hat{\vec{k}}\times\hat{n}=k_1\times\hat{n} \Rightarrow \hat{\vec{k}}.\hat{j}=0$$

(صفحات دامنه ثابت موازی با صفحهٔ فرودی) $k_i\times\hat{n}=0 \Rightarrow k_i\parallel\hat{n}$

$$k_2\sin\Theta=k_1\sin\theta_1$$

Θ: زاویهٔ شکست حقیقی، زاویهٔ بین صفحات با فاز ثابت و صفحهٔ فرودی.

$$\hat{\vec{k}}=k_2\sin\Theta\,\hat{i}+k_2\cos\Theta\,\hat{k}+ik_i\,\hat{k}$$

$$\hat{k}\cos\hat{\theta}=k_2\cos\Theta+ik_i$$

$$\hat{k}\sin\hat{\theta}=k_2\sin\Theta=k_1\sin\theta_1$$

$$\hat{n}\cos\hat{\theta}=p+iq \Rightarrow \hat{\vec{k}}\cos\hat{\theta}=\frac{w}{c}p+iw\frac{q}{c}=k_2\cos\Theta+ik_i$$

$$k_i=\frac{wq}{c} \quad , \quad \frac{wp}{c}=k_2\cos\theta \Rightarrow \frac{w^2p^2}{c^2}=k_2^2(1-\sin^2\Theta)$$

$$\frac{w^2p^2}{c^2}+k_1^2\sin^2\theta_1=k_2^2 \Rightarrow k_2=\frac{w}{c}\sqrt{p^2+n_1^2\sin^2\theta_1}$$

N: ضریب شکست حقیقی که به θ_1 وابسته است.

$$N=\sqrt{p^2+n_1^2\sin^2\theta_1} \Rightarrow k_2=\frac{w}{c}N$$

$$\hat{\vec{k}}\times\hat{n}=\vec{k}_1\times\hat{n} \xrightarrow{\text{قسمت حقیقی}} k_2\sin\Theta=k_1\sin\theta_1$$

$$N\sin\Theta=n_1\sin\theta_1$$

برای این حالت $p>>1 \Leftarrow N>>1$,چون $\Theta=0 \Leftarrow n_1\sin\theta_1=cte$ می‌شود، بنابراین:

$$k_2\sin\Theta=\hat{k}\sin\hat{\theta} \quad , \quad \hat{k}\neq 0 \Rightarrow \sin\hat{\theta}=0$$

$$\Rightarrow \cos\hat{\theta}=\sqrt{1-\sin^2\hat{\theta}}\cong 1$$

$$\hat{r}_{12p}=\frac{\hat{n}_2\cos\theta_1-n_1\cos\hat{\theta}_2}{\hat{n}_2\cos\theta_1+n_1\cos\hat{\theta}_2}=\frac{(n+i\kappa)\cos\theta_1-1}{(n+i\kappa)\cos\theta_1+1}$$

$$=\frac{(n\cos\theta_1-1)+i\kappa\cos\theta_1}{(n\cos\theta_1+1)+i\kappa\cos\theta_1}$$

$$R_p=r_{12p}^*\,r_{12p}$$

$$=\frac{(n\cos\theta_1-1)-i\kappa\cos\theta_1}{(n\cos\theta_1+1)+i\kappa\cos\theta_1}\times\frac{(n\cos\theta_1-1)+i\kappa\cos\theta_1}{(n\cos\theta_1+1)+i\kappa\cos\theta_1}$$

$$=\frac{(n\cos\theta_1-1)^2+\kappa^2\cos^2\theta_1}{(n\cos\theta_1+1)^2+\kappa^2\cos^2\theta_1}$$

$$A_p=1-R_p$$

$$=\frac{(n\cos\theta_1+1)^2+\kappa^2\cos^2\theta_1-(n\cos\theta_1-1)^2-\kappa^2\cos^2\theta_1}{(n\cos\theta_1+1)^2+\kappa^2\cos^2\theta_1}$$

$$=\frac{4n\cos\theta_1}{(n\cos\theta_1+1)^2+\kappa^2\cos^2\theta_1}$$

چون $n>>1 \Leftarrow$ از یک در مقابل $n\cos\theta_1$ صرفنظر می‌کنیم:

$$A_p\cong\frac{4n\cos\theta_1}{2\kappa^2\cos^2\theta_1}=\frac{2}{\kappa\cos\theta_1}$$

$$\hat{r}_{12s}=\frac{n_1\cos\theta_1-\hat{n}_2\cos\hat{\theta}_2}{n_1\cos\theta_1+\hat{n}_2\cos\hat{\theta}_2}=\frac{\cos\theta_1-(n+i\kappa)}{\cos\theta_1+(n+i\kappa)}$$

$$=\frac{(\cos\theta_1-n)-i\kappa}{(\cos\theta_1+n)+i\kappa}$$

$$R_s=\frac{(\cos\theta_1-n)+i\kappa}{(\cos\theta_1+n)-i\kappa}\times\frac{(\cos\theta_1-n)-i\kappa}{(\cos\theta_1+n)+i\kappa}=\frac{(\cos\theta_1-n)^2+\kappa^2}{(\cos\theta_1+n)^2+\kappa^2}$$

$$A_s=1-\frac{(\cos\theta_1-n)^2+\kappa^2}{(\cos\theta_1+n)^2+\kappa^2}=\frac{4\cos\theta_1 n}{(\cos\theta_1+n)^2+\kappa^2}\simeq\frac{4\kappa\cos\theta_1}{n^2+\kappa^2}$$

$$\simeq\frac{4\kappa\cos\theta_1}{2\kappa^2}=\frac{2\cos\theta_1}{\kappa}$$

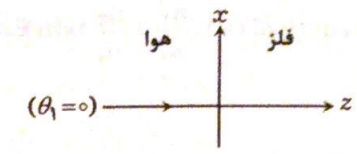
PowerEn.ir

۱۸ - ۸ - موجی در هوا به طور عمود بر سطح رسانایی فرود می‌آید و از آن باز می‌تابد. (الف) از $\hat{r}_{12s}$ نشان دهید که انتقال فاز بردار E برابر است با

$$\alpha_s = \tan^{-1}\frac{2k}{n^2+k^2-1}$$

(ب) نشان دهید که این نتیجه برای حالت رسانندگی بی‌نهایت به $\alpha_s = \pi$ تبدیل می‌شود.

حل:



$$\theta_1 = 0 \qquad \hat{r}_{12s} = |\hat{r}_{12s}|\, e^{i\alpha_s} \quad , \quad \alpha_s = ?$$

$$\theta_1 = 0 \quad , \quad n_1 \sin\theta_1 = \hat{n}_2 \sin\hat{\theta}_2 \quad , \quad \hat{n}_2 \neq 0 \Rightarrow \sin\hat{\theta}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos\hat{\theta}_2 = 1$$

$$\hat{r}_{12s} = \frac{n_1\cos\theta_1 - \hat{n}_2\cos\hat{\theta}_2}{n_1\cos\theta_1 + \hat{n}_2\cos\hat{\theta}_2} = \frac{\cos\theta_1 - \hat{n}_2}{\cos\theta_1 + \hat{n}_2} = \frac{1-\hat{n}_2}{1+\hat{n}_2}$$

$$\hat{r}_{12s} = \frac{1-(n+i\kappa)}{1+(n+i\kappa)} = \frac{(1-n)-i\kappa}{(1+n)+i\kappa} \times \frac{(1+n)-i\kappa}{(1+n)-i\kappa}$$

$$= \frac{((1-n)-i\kappa)((1+n)-i\kappa)}{(1+n)^2+\kappa^2} = \frac{(1-n)^2-\kappa^2-2i\kappa}{(1+n)^2+\kappa^2}$$

و با توجه به روابط زیر:

$$Z = a+ib \quad , \quad Z = re^{i\theta} \qquad r = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

داریم:

$$\tan\alpha_s = \frac{\frac{-2\kappa}{(1+n)^2+\kappa^2}}{\frac{(1-n)^2-\kappa^2}{(1+n)^2+\kappa^2}} = \frac{-2\kappa}{(1-n)^2-\kappa^2} = \frac{2\kappa}{n^2+\kappa^2-1}$$

$$\alpha_s = \tan^{-1}\left(\frac{2\kappa}{n^2+\kappa^2-1}\right)$$

$$\mathbf{K}_i >> 1 \quad , \quad \kappa = \sqrt{\frac{\mathbf{K}_i}{2}} \quad , \quad \kappa \cong n >> 1 : \alpha_s = \tan^{-1}\frac{2\kappa}{2\kappa^2}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{\kappa} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{2}{\mathbf{K}_i}} \quad , \quad \mathbf{K}_i = \frac{g}{\varepsilon_0 w} \quad , \quad g \to \infty \Rightarrow$$

$$\alpha_s = \pi, 0$$

صفر غیر قابل قبول است، چون فاز ورودی و فاز بازتابی یک اختلاف فازی با هم دارند.

نکته: موجی که در هوا به طور عمود به سطح رسانایی فرود می‌آید، انتقال فاز بردار E:

$$\alpha_s = \tan^{-1}\left(\frac{2\kappa}{n^2+\kappa^2-1}\right)$$

۱۸ - ۹ - فرض کنید یک موج رادیویی با $w = 10^7\ s^{-1}$ به طور عمود بر سطح زمین فرو می‌آید و از آن بازمی‌تابد. از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۸-۸ انتقال فاز ناشی از بازتاب را محاسبه کنید. فرض کنید برای این ناحیه از زمین $K = 9$ و $g = 10^{-4}\ (\Omega m)^{-1}$ است.

حل:

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{K} = 9 \quad , \quad \mathbf{K}_i = \frac{g}{\varepsilon_0 w} = \frac{10^{-4}}{8/85\times10^{-12}\times10^7} = 1/13 \qquad (1)$$

برای فرود عمود $q = \kappa$ و $n = p$ است.

$$n = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\mathbf{K}_r + \sqrt{\mathbf{K}_r^2+\mathbf{K}_i^2}\right]} \qquad \kappa = \sqrt{\frac{1}{2}\left[-\mathbf{K}_r + \sqrt{\mathbf{K}_r^2+\mathbf{K}_i^2}\right]} \qquad (2)$$

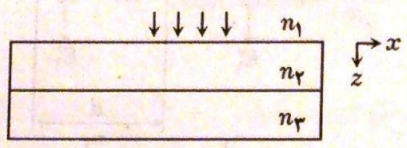
$$(2)\ \text{و}\ (1) \Rightarrow n \cong 3 \qquad \kappa \cong 1/88\times10^{-1}$$

$$\alpha_s = \tan^{-1}\frac{2\kappa}{n^2+\kappa^2-1} = \tan^{-1}\left(\frac{0/376}{8/035}\right) = \tan^{-1}(4/68\times10^{-2})$$

$$\Rightarrow \alpha_s = 2/68$$

۱۸ - ۱۰ - محیط دی‌الکتریک با ضریب شکست n_3 با لایه‌ای به ضریب شکست n_2 اندود شده است، و موجی از محیط دی‌الکتریک n_1 بر روی آن فرود می‌آید. نشان دهید که به ازای $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ داریم $r_{23} = r_{12}$ و بنابراین به ازای $\cos\beta = -1$ در فرود عمود، $R = 0$ است.

حل:



$$r_{12s} = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} \quad , \quad r_{23s} = \frac{n_2\cos\theta_2 - n_3\cos\theta_3}{n_2\cos\theta_2 + n_3\cos\theta_3}$$

فرود عمود: $\theta_1 = 0 \Rightarrow n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 = n_3\sin\theta_3$

$$\Rightarrow \theta_2 = \theta_3 = 0$$

$$r_{12s} = r_{23s} \Rightarrow \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} = \frac{n_2-n_3}{n_2+n_3}$$

$$\Rightarrow (n_1-n_2)(n_2+n_3) = (n_1+n_2)(n_2-n_3)$$

$$\Rightarrow n_1n_2 + n_1n_3 - n_2^2 - n_2n_3 = n_1n_2 - n_1n_3 + n_2^2 - n_2n_3$$

$$\Rightarrow 2n_1n_3 = 2n_2^2 \Rightarrow \sqrt{n_1n_3} = n_2$$

$$\hat{r} = \frac{\hat{r}_{12} + \hat{r}_{23}e^{i\beta}}{1+\hat{r}_{12}\hat{r}_{23}e^{i\beta}} \qquad n_1, n_2, n_3 \in R$$

$$\Rightarrow r = \frac{r_{12} + r_{23}e^{i\beta}}{1+r_{12}r_{23}e^{i\beta}}$$

$$R = rr^* = \frac{r_{12}+r_{23}e^{i\beta}}{1+r_{12}r_{23}e^{i\beta}} \times \frac{r_{12}+r_{23}e^{-i\beta}}{1+r_{12}r_{23}e^{-i\beta}}$$

$$= \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{12}r_{23}e^{-i\beta} + r_{23}r_{12}e^{i\beta}}{1+r_{12}r_{23}e^{-i\beta} + r_{12}r_{23}e^{i\beta} + r_{12}^2r_{23}^2}$$

$$= \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23}\cos\beta}{1+r_{12}^2r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23}\cos\beta}$$

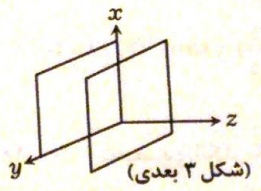
$$(\text{فرود عمود}: \theta_1 = 0)\ ,\ n_2 = \sqrt{n_1n_3} \Rightarrow r_{12} = r_{23}\ ,\ \cos\beta = -1$$

PowerEn.ir

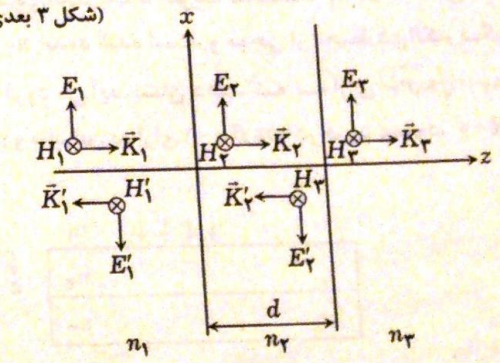
$$R=\frac{r_{۱۲}^{۲}+r_{۱۲}^{۲}-۲r_{۱۲}^{۲}}{۱+r_{۱۲}^{۴}-۲r_{۱۲}^{۲}}=\frac{r_{۱۲}^{۲}-r_{۱۲}^{۲}}{۱+r_{۱۲}^{۴}-۲r_{۱۲}^{۲}}=۰ \Rightarrow R=۰$$

۱۸ - ۱۱ - باریکه‌ای از نور تکفام (با فرکانس w) در هوا بر روی لایهٔ دی‌الکتریکی به ضریب شکست n به طور عمود فرود می‌آید. ضخامت لایهٔ d است. با ارضای شرایط مرزی در دو وجه لایه، ضریب شکست و انتقال را بر حسبت d و n به دست آورید. علاوه بر امواج فرودی $E_۱$، بازتابیده $E'_۱$، و تراگسیلیده $E_۳$، فرض کنید در داخل لایه امواجی وجود دارند که به سمت راست ($E_۲$) و به سمت چپ ($E'_۲$) در حرکت‌اند.

حل:



(شکل ۳ بعدی)



$n_۱, n_۲, n_۳$ هر سه حقیقی، در واقع هر سه محیط نارسانا هستند، بنابراین میدانها در سه محیط برابرند با:

$$\vec{E}=\hat{i}[E_۱e^{-i(wt-k_۱z)}-E'_۱e^{-i(wt+k_۱z)}] \qquad z<۰$$
$$\vec{E}=\hat{i}[E_۲e^{-i(wt-k_۲z)}-E'_۲e^{-i(wt+k_۲z)}] \qquad ۰<z<d$$
$$\vec{E}=\hat{i}\,E_۳e^{-i(wt-k_۳z)} \qquad z>d$$
$$\hat{B}=\frac{n}{c}\hat{u}\times\hat{E} \Rightarrow (B \text{ هادرجهت } y \text{ هستند}) \qquad |\hat{B}|=\frac{n}{c}|\hat{E}|$$
$$\vec{B}=\hat{j}\frac{n_۱}{c}[E_۱e^{-i(wt-k_۱z)}+E'_۱e^{-i(wt+k_۱z)}] \qquad z<۰$$
$$\vec{B}=\hat{j}\frac{n_۲}{c}[E_۲e^{-i(wt-k_۲z)}+E'_۲e^{-i(wt+k_۲z)}] \qquad ۰<z<d$$
$$\vec{B}=\hat{j}\frac{n_۳}{c}E_۳e^{-i(wt-k_۳z)} \qquad z>d$$

چون محیطها غیرمغناطیسی (شفاف) هستند، $\mu=\mu_۰$ است، با اعمال شرایط مرزی ضرایب فرنل و از روی آنها ضرایب انعکاس و شکست را به دست می‌آوریم. شرایط مرزی عبارتند از: پیوستگی مؤلفه مماسی میدان الکتریکی، پیوستگی مؤلفه مماسی شدت میدان مغناطیسی و با توجه به $\mu=\mu_۰$، پیوستگی مؤلفه مماسی میدان مغناطیسی در مرزها $z=۰,d$.

$$E_۱-E'_۱=E_۲-E'_۲ \qquad (z=۰) \qquad (۱)$$
$$E_۲e^{-i(wt-k_۲d)}-E'_۲e^{-i(wt+k_۲d)}=E_۳e^{-i(wt-k_۳d)} \qquad (z=d)$$
$$\Rightarrow E_۲e^{ik_۲d}-E'_۲e^{-ik_۲d}=E_۳e^{ik_۳d} \qquad (۲)$$
$$n_۱(E_۱+E'_۱)=(E_۲+E'_۲)n_۲ \qquad (z=۰) \qquad (۳)$$
$$n_۲[E_۲e^{-i(wt-k_۲d)}+E'_۲e^{-i(wt+k_۲d)}]=n_۳E_۳e^{-i(wt-k_۳d)} \qquad (z=d)$$
$$\Rightarrow n_۲E_۲e^{ik_۲d}+n_۲E'_۲e^{-ik_۲d}=n_۳E_۳e^{ik_۳d} \qquad (۴)$$
$$(۲),(۴)\Rightarrow E_۲=\frac{n_۲+n_۳}{۲n_۲}E_۳e^{i(k_۳-k_۲)d},$$
$$E'_۲=\frac{n_۳-n_۲}{۲n_۲}e^{i(k_۳+k_۲)d}E_۳ \qquad (۵)$$
$$(۱),(۳)\Rightarrow ۲E_۱=(\frac{n_۲}{n_۱}+۱)E_۲+(\frac{n_۲}{n_۱}-۱)E'_۲ \qquad (۶)$$
$$(۵),(۶)\Rightarrow$$
$$\frac{E_۱}{E_۳}=\frac{۱}{۲}[(۱+\frac{n_۳}{n_۱})\cos(k_۲d)-i(\frac{n_۲}{n_۱}+\frac{n_۳}{n_۲})\sin k_۲d]e^{ik_۳d}$$

بنابراین:

$$T=\frac{n_۳}{n_۱}|\frac{E_۳}{E_۱}|^{۲}$$
$$=\frac{n_۳}{n_۱}[\frac{۱}{۴}(۱+\frac{n_۳}{n_۱})^{۲}\cos^{۲}(k_۲d)+\frac{۱}{۴}(\frac{n_۲}{n_۱}+\frac{n_۳}{n_۲})^{۲}\sin^{۲}(k_۲d)]^{-۱}$$

به همین ترتیب اگر $\frac{E'_۱}{E_۱}$ را از معادلات مفروض بدست آوریم، R بدست می‌آید و یا می‌توانیم از رابطه $R=۱-T$ استفاده کنیم.

۱۸ - ۱۲ - معادلهٔ ماتریسی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{pmatrix}E_m\\E'_m\end{pmatrix}=(C_m)\begin{pmatrix}E_{m+۱}\\E'_{m+۱}\end{pmatrix}$$

که در آن

$$(C_m)=\frac{۱}{t_{m,m+۱}}\begin{pmatrix}e^{i(۱/۲)\beta_m} & r_{m,m+۱}e^{i(۱/۲)\beta_m}\\ r_{m,m+۱}e^{-i(۱/۲)\beta_m} & e^{-i(۱/۲)\beta_m}\end{pmatrix}$$

(الف) تحقیق کنید که نتایج مربوط به فصل مشترک بین دو دی‌الکتریک از رابطهٔ زیر، با $\beta_۱=۰$، به دست می‌آید

$$\begin{pmatrix}E_۱\\E'_۱\end{pmatrix}=(C_۱)\begin{pmatrix}E_۲\\۰\end{pmatrix}$$

(ب) تحقیق کنید که نتایج مربوط به دو فصل مشترک از رابطهٔ زیر، با $\beta_۲=۲d_۲(w/c)n_۲\cos\theta_۲$، به دست می‌آید

$$\begin{pmatrix}E_۱\\E'_۱\end{pmatrix}=(C_۱)(C_۲)\begin{pmatrix}E_۳\\۰\end{pmatrix}$$

این روش برای تعمیم به دستگاهی شامل لایه‌های چندگانه‌ای که با مرزهای تخت از هم جدا شده باشند، مناسب است.

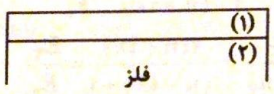
حل:

$$\begin{bmatrix}E_m\\E'_m\end{bmatrix}=(C_m)\begin{bmatrix}E_{m+۱}\\E'_{m+۱}\end{bmatrix}$$
$$C_m=\frac{۱}{t_{m,m+۱}}\begin{bmatrix}e^{i\frac{\beta_m}{۲}} & r_{m,m+۱}e^{i(\frac{\beta_m}{۲})}\\ r_{m,m+۱}e^{-i(\frac{\beta_m}{۲})} & e^{-i(\frac{\beta_m}{۲})}\end{bmatrix}$$
$$if \quad \beta_m=\beta_۱=۰ \begin{bmatrix}E_۱\\E'_۱\end{bmatrix}=C_۱\begin{bmatrix}E_۲\\۰\end{bmatrix} \Rightarrow t_{۱۲}, r_{۱۲}$$
$$\begin{bmatrix}E_۱\\E'_۱\end{bmatrix}=\frac{۱}{t_{۱,۲}}\begin{bmatrix}۱ & r_{۱,۲}\\ r_{۱,۲} & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_۲\\۰\end{bmatrix} \Rightarrow$$

PowerEn.ir

۱۸ - ۱۳ - یک سطح فلزی با لایه‌ای از دی‌الکتریک اندود شده است. با فرض آنکه فلز یک رسانای کامل است ($g=\infty$)، ضریب بازتاب حاصل را محاسبه کنید.

حل:



رسانای کامل : $g\to\infty$, $\mathbf{K}_i=\frac{g}{\varepsilon_\circ w}\to\infty\Rightarrow n\cong\kappa>>1$

$$\kappa=\sqrt{\frac{-1}{2}\mathbf{K}_2+\sqrt{\mathbf{K}_i^2+\mathbf{K}_r^2}}\to\infty\Rightarrow\hat{n}^2=(n+i\kappa)^2\to\infty$$

$$r_{12s}=\frac{n_1\cos\theta_1-\hat{n}_2\cos\hat{\theta}_2}{n_1\cos\theta_1+\hat{n}_2\cos\hat{\theta}_2}=\frac{\hat{n}_2\cos\hat{\theta}_2[\frac{n_1\cos\theta_1}{\hat{n}_2\cos\hat{\theta}_2}-1]}{\hat{n}_2\cos\hat{\theta}_2[\frac{n_1\cos\theta_1}{\hat{n}_2\cos\hat{\theta}_2}+1]}=-1$$

$$\Rightarrow R_s=1$$

$$r_{12p}=\frac{\hat{n}_2\cos\theta_1-n_1\cos\hat{\theta}_2}{\hat{n}_2\cos\theta_1+n_1\cos\hat{\theta}_2}=\frac{\hat{n}_2[\cos\theta_1-\frac{n_1\cos\hat{\theta}_2}{\hat{n}_2}]}{\hat{n}_2[\cos\theta_1+\frac{n_1\cos\hat{\theta}_2}{\hat{n}_2}]}=1$$

$$\Rightarrow R_p=1$$

نکته: یک سطح فلزی با لایه‌ای از دی الکتریک اندوده شده است، با فرض آنکه فلز یک رسانای کامل است ($(g\to\infty)\Leftarrow$ ضریب انعکاس: $R_s=1$, $R_p=1$.

۱۸ - ۱۴ - بر روی سطح یک لایهٔ فلزی که بدون حائل در هوا واقع است، تابشی به طور عمودی فرود می‌آید. فرض کنید لایه به حد کافی ضخیم است به طوری که می‌توان از بازتابهای مکرر چشمپوشی کرد. ضریب انتقال T را بر حسب n و k ی فلز محاسبه کنید.

حل:

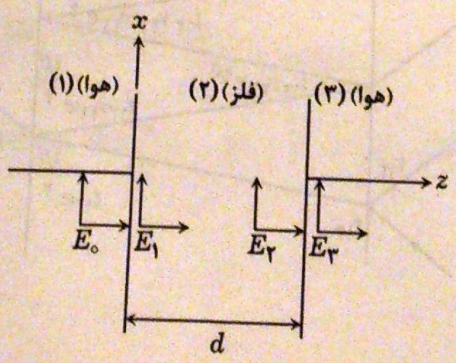
$$\frac{\vec{E}_2}{\vec{E}_1}=\frac{\hat{i}E_\circ e^{-i(wt-\hat{\vec{k}}_2.\vec{r}_2)}}{\hat{i}E_\circ e^{-i(wt-\hat{\vec{k}}_2.\vec{r}_1)}}=\frac{\hat{i}E_\circ e^{-i(wt-\hat{\vec{k}}_r.\vec{r}_2)}e^{-\vec{k_i}.\vec{r}_2}}{\hat{i}E_\circ e^{-i(wt-\hat{\vec{k}}_r.\vec{r}_2)}e^{-i\vec{k_i}.\vec{r}_1}}$$

$$\vec{r}_2=d\hat{k}\quad,\quad\vec{r}_1=\circ$$

$$\frac{\vec{E}_2}{\vec{E}_1}=\frac{\hat{i}E_\circ e^{-i(wt-k_r\hat{k}.d\hat{k})-k_i\hat{k}.d\hat{k}}}{\hat{i}E_\circ e^{-i(wt-\circ)}e^\circ}\Rightarrow$$

نسبت دامنه‌ها: $\frac{E_2}{E_1}=e^{\frac{-d}{\delta}}$

E_2 همان E_1 است ولی با دامنه $e^{-\vec{k_i}.d\hat{k}}$ کاهش یافته و تضعیف شده است.



$$\begin{bmatrix}E_1\\E_1'\end{bmatrix}=\frac{1}{t_{1,2}}\begin{bmatrix}E_2\\r_{1,2}E_2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}E_1=\frac{E_2}{t_{1,2}}\\E_1'=\frac{r_{1,2}}{t_{1,2}}E_2\end{cases}\Rightarrow\frac{E_2}{E_1}=t_{1,2}$$

$$E_1'=\frac{r_{1,2}}{t_{1,2}}\times t_{1,2}E_1\Rightarrow\frac{E_1'}{E_1}=r_{12}$$

$$\beta_2=2d(\frac{w}{C})n_2\cos\theta_2\begin{bmatrix}E_1\\E_1'\end{bmatrix}=C_1C_2\begin{bmatrix}E_3\\\circ\end{bmatrix}$$

$$C_1=\frac{1}{t_{1,2}}\begin{bmatrix}1&r_{1,2}\\r_{1,2}&1\end{bmatrix},$$

$$C_2=\frac{1}{t_{2,3}}\begin{bmatrix}e^{\frac{i\beta_2}{2}}&r_{2,3}e^{\frac{i\beta_2}{2}}\\r_{2,3}e^{\frac{-i\beta_2}{2}}&e^{\frac{-i\beta_2}{2}}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}E_1\\E_1'\end{bmatrix}=\frac{1}{t_{1,2}t_{2,3}}\begin{bmatrix}1&r_{1,2}\\r_{1,2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{\frac{i\beta_2}{2}}&r_{2,3}e^{\frac{i\beta_2}{2}}\\r_{2,3}e^{\frac{-i\beta_2}{2}}&e^{\frac{-i\beta_2}{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_3\\\circ\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}E_1\\E_1'\end{bmatrix}=\frac{1}{t_{1,2}t_{2,3}}\begin{bmatrix}e^{\frac{i\beta_2}{2}}+r_{1,2}r_{2,3}e^{\frac{-i\beta_2}{2}}&r_{2,3}e^{\frac{i\beta_2}{2}}+r_{1,2}e^{\frac{-i\beta_2}{2}}\\r_{1,2}e^{\frac{i\beta_2}{2}}+r_{2,3}e^{\frac{-i\beta_2}{2}}&r_{1,2}r_{2,3}e^{\frac{i\beta_2}{2}}+e^{\frac{-i\beta_2}{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_3\\\circ\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}E_1\\E_1'\end{bmatrix}=\frac{1}{t_{1,2}t_{2,3}}\begin{bmatrix}(e^{\frac{i\beta_2}{2}}+r_{1,2}r_{2,3}e^{\frac{-i\beta_2}{2}})E_3\\(r_{1,2}e^{\frac{i\beta_2}{2}}+r_{2,3}e^{\frac{-i\beta_2}{2}})E_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}E_1=\frac{1}{t_{1,2}t_{2,3}}[e^{\frac{i\beta_2}{2}}+r_{1,2}r_{2,3}e^{\frac{-i\beta_2}{2}}]E_3\\E_1'=\frac{1}{t_{1,2}t_{2,3}}[r_{1,2}e^{\frac{i\beta_2}{2}}+r_{2,3}e^{\frac{-i\beta_2}{2}}]E_3\end{cases}$$

$$t=\frac{E_3}{E_1}=\frac{1}{\frac{1}{t_{12}t_{23}}(e^{\frac{i\beta_2}{2}}+r_{12}r_{23}e^{\frac{-i\beta_2}{2}})}$$

$$=\frac{t_{12}t_{23}}{e^{\frac{i\beta_2}{2}}+r_{12}r_{23}e^{\frac{-i\beta_2}{2}}}=\frac{t_{12}t_{23}e^{\frac{-i\beta_2}{2}}}{1+r_{12}r_{23}e^{\frac{-i\beta_2}{2}}}$$

$$r=\frac{E_1'}{E_1}=\frac{\frac{1}{t_{12}t_{23}}(r_{12}e^{\frac{i\beta_2}{2}}+r_{23}e^{\frac{-i\beta_2}{2}})}{\frac{1}{t_{12}t_{23}}(e^{\frac{i\beta_2}{2}}+r_{12}r_{23}e^{\frac{-i\beta_2}{2}})}=\frac{r_{12}+r_{23}e^{\frac{-i\beta_2}{2}}}{1+r_{12}r_{23}e^{\frac{-i\beta_2}{2}}}$$

PowerEn.ir

فرود عمودی: $\hat{t}_{12}=\frac{2n_1}{n_1+\hat{n}_2}$, $n_1=1$, $\hat{n}_2$

$$\hat{t}_{12}=\frac{2}{1+\hat{n}_2}=\frac{2}{1+(n+i\kappa)}=\frac{E_1}{E_0}$$

$$\hat{t}_{23}=\frac{2\hat{n}_2}{\hat{n}_2+n_3}=\frac{2(n+i\kappa)}{(n+i\kappa)+1}=\frac{E_2}{E_0}$$

$$\Rightarrow \hat{t}_{23}=\frac{E_2}{E_1 e^{-\frac{d}{\delta}}}=\frac{2(n+i\kappa)}{(n+i\kappa)+1} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1}=\frac{2(n+i\kappa)e^{-\frac{d}{\delta}}}{(n+i\kappa)+1}$$

$$\frac{E_1}{E_0}=\frac{2}{1+(n+i\kappa)} \Rightarrow E_1=\frac{2E_0}{1+(n+i\kappa)}$$

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{2(n+i\kappa)e^{-\frac{d}{\delta}}}{(n+i\kappa)+1}$$

$$\Rightarrow t=\frac{E_2}{E_0}=\frac{2(n+i\kappa)e^{-\frac{d}{\delta}}}{(n+i\kappa)+1}\times\frac{2}{1+(n+i\kappa)}=\frac{4(n+i\kappa)e^{-\frac{d}{\delta}}}{[1+(n+i\kappa)]^2}$$

$$T=\frac{n.\bar{s}_2}{n.\bar{s}_0}=\frac{\cos\theta_2\frac{n_2}{\mu_0 C}E_2^2}{\cos\theta_1\frac{n_1}{\mu_0 C}E_0^2}=\frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\left[\frac{E_2}{E_0}\right]^2$$

$$=\frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}t^*t$$

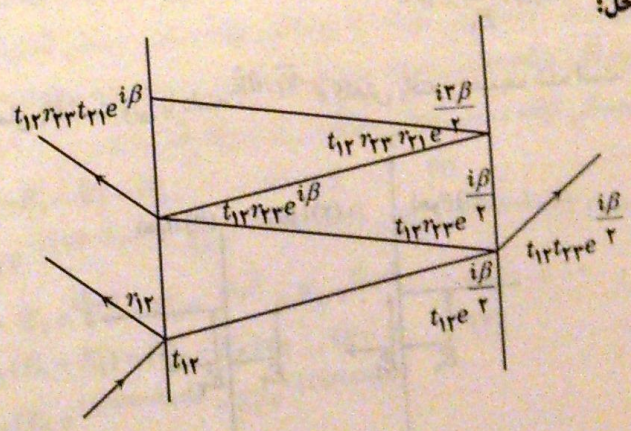
فرود عمودی داریم: $\theta_1=\theta_2=0$, $n_1=1$, $n_2=1$ است، بنابراین:

$$T=t^*t=\frac{4(n+i\kappa)e^{-\frac{d}{\delta}}}{[1+(n+i\kappa)]^2}\times\frac{4(n+i\kappa)e^{-\frac{d}{\delta}}}{[1+(n-i\kappa)]^2}$$

$$=\frac{16(n^2+\kappa^2)e^{-\frac{2d}{\delta}}}{[1+(n+i\kappa)]^2[1+(n-i\kappa)]^2}$$

۱۸ - ۱۵ - تیغهٔ دی‌الکتریکی را در نظر بگیرید که به قدری ضخیم است که باریکه‌های بازتابیدهٔ چندگانه نمی‌توانند با هم به طور همدوس تداخل کنند. (الف) با جمع کردن تمام شدتها، ضریب بازتاب کل را بر حسب ضرایب انعکاس R_{12} و R_{23} مربوط به هر یک از مرزها به دست آورید. (ب) نتیجه را در حالت خاص برای موردی که در آن محیطهای دو طرف تیغه یکسان‌اند، به دست آورید.

حل:



اگر بره ضخامتش کم باشد (در حدود طول موج) باریکه‌های انعکاسی چندگانه با هم به طور همدوس تداخل می‌کنند و اختلاف فاز آنها همدوس است ولی اگر ضخامت زیاد باشد باریکهای انعکاسی چندگانه با هم به طور همدوس تداخل نمی‌کنند و اختلاف فاز آنها به صورت کتره‌ای کم و زیاد می‌شود.

در حالت همدوس برای $\hat{r}$ و $\hat{t}$ از جمع دامنه‌ها استفاده می‌شود.

در حالت ناهمدوس برای R و T از جمع شدتها استفاده می‌کنیم.

$$R=|\hat{r}_{12}|^2+|\hat{t}_{12}\hat{r}_{23}\hat{t}_{21}|^2+|\hat{r}_{23}\hat{t}_{12}\hat{t}_{21}\hat{r}_{21}\hat{r}_{23}|^2+\cdots$$

$$=|\hat{r}_{12}|^2+|\hat{t}_{12}\hat{r}_{23}\hat{t}_{21}|^2[1+|\hat{r}_{21}\hat{r}_{23}|^2+|\hat{r}_{21}\hat{r}_{23}|^4+\cdots]$$

$$1+x^2+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$$

$$R=|\hat{r}_{12}|^2+|\hat{t}_{12}\hat{t}_{21}\hat{r}_{23}|^2\left[\frac{1}{1-|\hat{r}_{21}\hat{r}_{23}|^2}\right]$$

$$=R_{12}+R_{23}|1-\hat{r}_{12}^2|^2\frac{1}{1-R_{21}R_{23}}$$

$$|1-\hat{r}_{12}^2|^2=(1-\hat{r}_{12}^2)(1-\hat{r}_{12}^{*2})=(1-\hat{r}_{12}\hat{r}_{12}^*)(1-\hat{r}_{12}\hat{r}_{12}^*)=(1-R_{12})^2$$

$$R=R_{12}+R_{23}[1+R_{12}^2-2R_{12}]\frac{1}{1-R_{21}R_{23}}$$

$$=R_{12}+\frac{R_{23}+R_{23}R_{12}^2-2R_{23}R_{12}}{1-R_{21}R_{23}}$$

$$=\frac{R_{12}-R_{12}^2R_{23}+R_{23}+R_{23}R_{12}^2-2R_{23}R_{12}}{1-R_{12}R_{23}}$$

$$=\frac{R_{12}+R_{23}-2R_{23}R_{12}}{1-R_{12}R_{23}}$$

$$\text{if } n_1=n_2 \Rightarrow \hat{r}_{21}=\hat{r}_{23} \ , \ \hat{r}_{12}=-\hat{r}_{21}$$

$$\Rightarrow \hat{r}_{12}=-\hat{r}_{21}=-\hat{r}_{23} \Rightarrow R_{12}=R_{23}$$

$$R=\frac{R_{12}+R_{12}-2R_{12}R_{12}}{1-R_{12}R_{12}}=\frac{2R_{12}-2R_{12}^2}{1-R_{12}^2}$$

$$=\frac{2R_{12}(1-R_{12})}{(1-R_{12})(1+R_{12})}=\frac{2R_{12}}{1+R_{12}}$$

۱۸ - ۱۶ - چگالی بار سطحی و جریان در واحد پهنا بر روی سطح یک رسانای کامل را که امواج تخت الکترومغناطیسی بر آن فرود می‌آیند، برای دو مورد زیر به دست آورید. (الف) بردار الکتریکی عمود بر صفحهٔ فرود، و (ب) بردار الکتریکی به موازات صفحهٔ فرود.

حل: شرایط مرزی که قبلاً بدست آمده عبارتند از:

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=0 \Rightarrow B_{1n}=B_{2n} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow E_{1t}=E_{2t} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=\rho \Rightarrow D_{1n}-D_{2n}=\sigma \quad (3)$$

(σ چگالی بار سطحی در فصل مشترک)

$$\vec{\nabla}.\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \Rightarrow J_{1n}-J_{2n}=iw\sigma \quad (4)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{J} \Rightarrow H_{1t}-H_{2t}=J_\perp \quad (5)$$

($J_\perp$ چگالی جریان سطحی)

PowerEn.ir

$$if\ \ g_2 \to \infty \ \begin{cases} \varepsilon_{01}E_{1n} - \varepsilon_{02}E_{2n} = \sigma \\ g_1 E_{1n} - g_2 E_{2n} = iw\sigma \end{cases} \Rightarrow E_{2n} = 0$$

$$\Rightarrow \quad E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_{01}}$$

$$E_2 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E}_2 = -\frac{\partial \vec{B}_2}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E}_2 = iw\vec{B}_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_2 = \frac{\vec{\nabla}\times\vec{E}_2}{i\mu_0 w} \Rightarrow \vec{H}_2 = \frac{\vec{\nabla}\times\vec{E}_2}{i\mu_0 w} = 0 \Rightarrow H_2 = 0$$

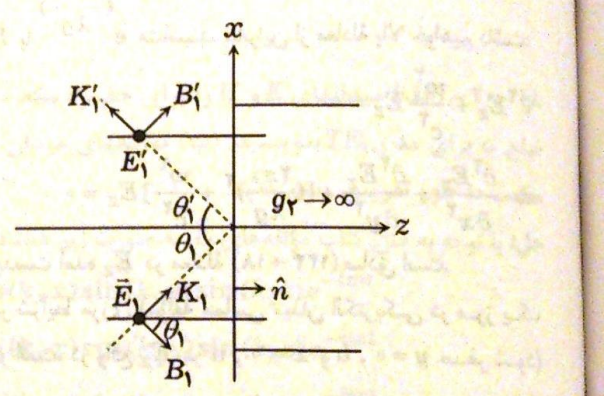
$$\Rightarrow H_{2n} = 0 \Rightarrow B_{2n} = 0 \xrightarrow{(B_{1n}=B_{2n})} B_{1n} = 0$$

$$H_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{2t} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{1t} = J_\perp$$

(مؤلفه s در راستای عمود بر صفحهٔ فرود)

صفحهٔ فرود: صفحه‌ای است که با $\hat{n}$ و $\vec{k}_1$ تعریف می‌شود و بردار عمود بر آن $\vec{k}_1 \times \hat{n}$ است. J در راستای s است.

مؤلفه p، در راستای موازی با صفحهٔ فرود است.



الف) قطبش s: برای اعمال شرایط مرزی $\vec{k}_1.\vec{r} = \vec{k}_2.\vec{r}$

$\vec{r}$ برداری بر روی مرز (اختیاری)

از نظر اندازه برابرند $k_1 = k_1'$: $\vec{k}_1 \times \hat{n} = \vec{k}_1' \times \hat{n} \Rightarrow k_1 \sin\theta_1 = k_1' \sin\theta_1'$

$$\Rightarrow \theta_1 = \theta_1'$$

$$g_2 \to \infty \ \Rightarrow \ E_{2n} = 0 \ \Rightarrow \ E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \ \Rightarrow \ D_{1n} = \sigma \qquad (1)$$

$$g_2 \to \infty \ \Rightarrow \ E_{2t} = 0 \ \Rightarrow \ E_{1t} = E_{2t} = 0$$

$$\vec{H}_2 = \frac{\vec{\nabla}\times\vec{E}_2}{\mu_0 w} = 0 \Rightarrow H_{2n} = 0 \Rightarrow B_{2n} = 0 \Rightarrow B_{1n} = B_{2n} = 0$$

$$H_{2t} - H_{1t} = J_\perp \ \Rightarrow \ -H_{1t} = J_\perp$$

$$\Rightarrow \vec{J}_f = -\hat{n}\times\vec{H}_{1t}$$

(از شکل و خاصیت ضرب برداری)

$\hat{n}$، بردار عمود بر مرز و چون قطبش s است و E_1 و E_1' هیچ مؤلفه‌ای در این راستا ندارند، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$(1) \Rightarrow D_{1n} = \sigma \ \Rightarrow \ \varepsilon_0(E_{1n}) = \sigma \ \Rightarrow \ \varepsilon_0(E_1 + E_1').\hat{n} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_f = 0$$

$$\vec{J}_f = -\hat{n}\times\vec{H}_{1t} = -\frac{\hat{n}}{\mu_0}\times\vec{B}_{1t}$$

از روی شکل داریم:

$$\begin{cases} \vec{B}_1 = B_1\cos(\frac{\pi}{2}-\theta_1)\hat{k} - B_1\sin(\frac{\pi}{2}-\theta_1)\hat{i} \\ \vec{B}_1' = B_1'\cos(\frac{\pi}{2}-\theta_1)\hat{k} + B_1'\sin(\frac{\pi}{2}-\theta_1)\hat{i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{B}_1 = B_1\sin\theta_1\,\hat{k} - B_1\cos\theta_1\,\hat{i} \\ \vec{B}_1' = B_1'\sin\theta_1\,\hat{k} + B_1'\cos\theta_1\,\hat{i} \end{cases}$$

بنابراین مؤلفه مماسی $(\hat{i})$ میدان مغناطیسی کل در محیط (۱) برابر است با:

$$B_{1t} = (B_1'\cos\theta_1 - B_1\cos\theta_1)\hat{i} = (B_1' - B_1)\cos\theta_1\,\hat{i}$$

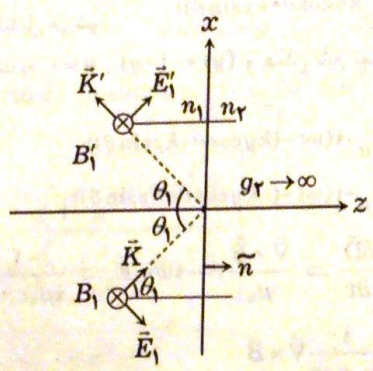
$$J_f = -\frac{\hat{k}}{\mu_0}\times(B_1' - B_1)\cos\theta_1\,\hat{i} = -\frac{\hat{j}}{\mu_0}(B_1' - B_1)\cos\theta_1$$

$$= \frac{\hat{j}}{\mu_0}(B_1 - B_1')\cos\theta_1$$

$$H_2 = 0 \Rightarrow B_{2n} = 0 \Rightarrow B_{1n} = 0$$

$$B_{1n} = (B_1\sin\theta_1 + B_1'\sin\theta_1) = 0 \Rightarrow B_1 = -B_1'$$

$$J_f = \frac{\hat{j}}{\mu_0}2B_1\cos\theta_1 = 2H_1\cos\theta_1\,\hat{j}$$



ب) قطبش p: E در موازات صفحه عمود.

$$H_2 = 0 \Rightarrow B_{2n} = 0 \Rightarrow B_{1n} = 0$$

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = E_1\cos(\frac{\pi}{2}-\theta_1)\hat{k} - E_1\sin(\frac{\pi}{2}-\theta_1)\hat{i} \\ \vec{E}_1' = E_1'\cos(\frac{\pi}{2}-\theta_1)\hat{k} + E_1'\sin(\frac{\pi}{2}-\theta_1)\hat{i} \end{cases}$$

$$g_2 \to \infty \ \Rightarrow \ E_2 = 0 \ \Rightarrow \ E_{1t} = E_{2t} = 0$$

$$\Rightarrow E_1'\cos\theta_1 - E_1\cos\theta_1 = 0 \ \Rightarrow \ E_1' = E_1$$

$$g_2 \to \infty \ \Rightarrow \ E_2 = 0 \ \Rightarrow \ E_{2n} = 0 \Rightarrow \varepsilon_0 E_{1n} = \sigma_f$$

$$\Rightarrow D_{1n} = \sigma_f$$

$$D_{1n} = \sigma_f \ \Rightarrow \ \varepsilon_{01}[E_1\sin\theta_1 + E_1'\sin\theta_1] = \sigma_f$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{01}[E_1 + E_1']\sin\theta_1 = \sigma_f$$

$$J_\perp = -H_{1t} \ \Rightarrow \ \vec{J}_f = -\hat{n}\times\vec{H}_{1t} = \frac{-\hat{n}\times\vec{B}_{1t}}{\mu_0},$$

$$\vec{B}_{1t} = [B_1 + B_1'](-\hat{j})$$

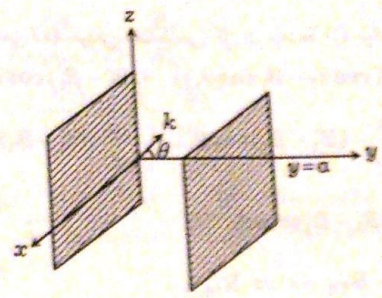
$$J_f = \frac{\hat{k}\times[B_1 + B_1']\hat{j}}{\mu_0} = \frac{-2B_1\,\hat{i}}{\mu_0} = -2H_1\,\hat{i}$$

$$\hat{B} = \frac{n}{c}\hat{u}\times\hat{E} \ \Rightarrow \ B = \frac{n}{c}E \ , \ E_1' = E_1 \ \Rightarrow \ B_1 = B_1'$$

PowerEn.ir

۱۸ - ۱۷ - برای امواج TM که در صفحهٔ yz بین دو صفحهٔ رسانای کامل، واقع در $y=0$ و $y=b$، انتشار می‌یابند، E و B را تعیین کنید.

حل:



تابع نمایی موج در رفت: $e^{-i(wt-(ky\cos\theta+kz\sin\theta))}$

وقتی به صفحهٔ $y=a$ برخورد می‌کند بردار انتشار با بردار $(-y)$ زاویه θ می‌سازد.

در واقع $y \leftarrow -y$ تبدیل می‌شود. $e^{-i(wt-(-ky\cos\theta+kz\sin\theta))}$

دوباره برخورد می‌کند به $y=0$ ، $(-y) \leftarrow (y)$ و همان تابع نمایی قبل را می‌دهد.

$$\vec{B}=\hat{i}[B_1 e^{-i(wt-(ky\cos\theta+kz\sin\theta))} + B'_1 e^{-i(wt-(-ky\cos\theta+kz\sin\theta))}]$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\vec{\nabla}\times\vec{B}}{\mu_0}=-iw\varepsilon_0\vec{E} \Rightarrow \frac{-1}{i\mu_0\varepsilon_0 w}\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{E}=\frac{i}{\mu_0\varepsilon_0 w}\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Bx & 0 & 0 \end{vmatrix}=\hat{j}\left(\frac{\partial Bx}{\partial z}\right)+\hat{k}\left(-\frac{\partial Bx}{\partial y}\right)$$

مؤلفه مماسی E باید روی دو صفحهٔ رسانا $y=0$ و $y=a$، صفر باشد.

$$E_t=E_z=\frac{\partial Bx}{\partial y}\Big|_{y=0}=B_1(ik\cos\theta)e^{-i(wt-(ky\cos\theta+kz\sin\theta))} + B'_1(-ik\cos\theta)e^{-i(wt-(-ky\cos\theta+kz\sin\theta))}=0$$

$$iB_1 k\cos\theta - ik\cos\theta B'_1=0 \Rightarrow B_1=B'_1$$

$$\vec{B}=\hat{i}B_1[e^{-i(wt-(ky\cos\theta+kz\sin\theta))} + e^{-i(wt-(-ky\cos\theta+kz\sin\theta))}]$$

$$=\frac{\partial B_x}{\partial z}=B_1(ik\sin\theta)e^{-i(wt-(ky\cos\theta+kz\sin\theta))} + B_1(ik\sin\theta)e^{-i(wt-(-ky\cos\theta+kz\sin\theta))}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y}=B_1(ik\cos\theta)e^{-i(wt-(ky\cos\theta+kz\sin\theta))} + B_1(-ik\cos\theta)e^{-i(wt-(-ky\cos\theta+kz\sin\theta))}$$

$$Ey=\frac{i}{\mu_0\varepsilon_0 w}B_1(ik\sin\theta)e^{-i(wt-kz\sin\theta)}[e^{iky\cos\theta}+e^{-iky\cos\theta}]$$

$$Ey=\frac{-k\,B_1}{\mu_0\varepsilon_0 w}\sin\theta\,2\cos(ky\cos\theta)$$

$$Ez=\frac{-k\cos\theta B_1}{\mu_0\varepsilon_0 w}[e^{iky\cos\theta}-e^{-iky\cos\theta}]e^{-i(wt-kz\sin\theta)}$$
$$(-2i\sin(ky\cos\theta))$$

$$Ez=\frac{k\cos\theta B_1}{\mu_0\varepsilon_0 w}2i\sin(ky\cos\theta)$$

۱۸ - ۱۸ - موج TM ی را در نظر بگیرید که در یک موجبر مستطیلی $(H_z=0)$ در جهت z با طول موج λ_g انتشار می‌یابد. نشان دهید که معادلهٔ زیر

$$E_z=A\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{2\pi iz/\lambda_g}$$

در معادلهٔ (۱۸ - ۱۲۳) و در شرایط مرزی صدق می‌کند. فرکانس قطع برای مُد TM_{11} چیست؟ چرا مُد TM_{10} وجود ندارد؟

حل:

$$\nabla^2\vec{E}+\frac{w^2}{c^2}\vec{E}=0$$

برای امواج TM که در جهت z منتشر می‌شوند، $H_z=0$ است و دیگر مؤلفه‌های $\vec{E}$ و $\vec{H}$ با $e^{(\frac{i2\pi z}{\lambda g})}$ متناسبند. بنابراین از معادلهٔ بالا خواهیم داشت:

$$\nabla^2 E_z+\frac{w^2}{c^2}E_z=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+[(\frac{2\pi i}{\lambda g})^2+\frac{w^2}{c^2}]E_z=0 \qquad (1)$$

با توجه به نتیجه بدست آمده E_z در معادلهٔ (۱۸ - ۱۲۳) صادق است.

و همچنین E_z در شرایط مرزی (مؤلفه مماسی میدان الکتریکی در مرز یک رسانای کامل صفر است، در واقع E_z در $x=0$ ، a و $y=0$ ، b صفر شود) صادق است.

با قرار دادن E_z در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$(\frac{2\pi}{\lambda g})^2+(\frac{n\pi}{b})^2+(\frac{m\pi}{a})^2=\frac{w^2}{c^2}=(\frac{2\pi}{\lambda_0})^2$$

$$\lambda_g\to\infty \quad \Rightarrow \quad (\frac{2}{\lambda_0})^2=(\frac{n}{b})^2+(\frac{m}{a})^2$$

بنابراین برای مد TM_{11} داریم:

$$(\lambda_0)_{11}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \Rightarrow \quad f_{11}=\frac{C}{(\lambda_0)_{11}}=\frac{C\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$$

چون $(E_z)_{10}=(E_z)_{01}=0$ است، بنابراین TM_{10} و TM_{01} وجود ندارند، در واقع پائین‌ترین مد غیرصفر برای امواج TM در یک موجبر مستطیلی مد TM_{11} است.

۱۸ - ۱۹ - برای موجبری با مقطعی مربعی شکل به ضلع a، مقادیر حدی a را در برای آنکه موجبر بتواند موجی با طول موج λ را در مد TE_{10} انتقال دهد ولی در مدهای TE_{11} یا TM_{11} انتقال ندهد تعیین کنید.

حل:

$$(\frac{2\pi}{\lambda g})^2=(\frac{2\pi}{\lambda_0})^2-(\frac{n\pi}{a})^2-(\frac{m\pi}{a})^2$$

PowerEn.ir

اگر λg موهومی محض باشد، موج با عامل $e^{\frac{-2\pi z}{|\lambda g|}}$ تضعیف می‌شود و در نتیجه انتشار موج نخواهیم داشت و اگر λg حقیقی باشد، موج با عامل نوسانی $e^{\frac{i2\pi z}{\lambda g}}$ انتقال می‌یابد. بنابراین برای آنکه موجبر بتواند موجی با طول موج λ را در مد TE_{10} انتقال دهد، باید داشته باشیم:

$$n=1\ ,\ m=0 \Rightarrow (\frac{2\pi}{\lambda g})^2=(\frac{2\pi}{\lambda})^2-(\frac{\pi}{a})^2 \quad \text{(باید حقیقی باشد)}$$

$$\Rightarrow (\frac{2\pi}{\lambda})^2 \geq (\frac{\pi}{a})^2 \Rightarrow a \geq \frac{\lambda}{2}$$

و شرط عدم انتقال موج با طول موج λ در مد TE_{11} یا TM_{11} عبارتست از:

$$n=m=1 \Rightarrow (\frac{2\pi}{\lambda g})^2=(\frac{2\pi}{\lambda})^2-2(\frac{\pi}{a})^2 \quad \text{(باید موهومی باشد)}$$

$$\Rightarrow (\frac{2\pi}{\lambda})^2 \leq 2(\frac{\pi}{a})^2 \Rightarrow a \leq \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$$

بنابراین برای آنکه هر دو شرط برقرار باشد، داریم:

$$\frac{\lambda}{2} \leq a \leq \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$$

۱۸ - ۲۰ - (الف) میدانهای E و H را برای حفرهٔ مکعب شکلی به ضلع a برای مد TE_{101} بنویسید. (ب) توزیعهای میدان را در سرتاسر مکعب به طور تقریبی رسم کنید.

حل: با توجه به متن کتاب مؤلفه‌های $\vec{E}$ به صورت زیر هستند:

$$E_x = E_1 \cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)e^{-iwt}$$

$$E_y = E_2 \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)e^{-iwt}$$

$$E_z = E_3 \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)e^{-iwt}$$

که در آن:

$$k_x=\frac{l\pi}{a}\ ,\ k_y=\frac{m\pi}{b}\ ,\ k_z=\frac{n\pi}{d}$$

بنابراین مؤلفه‌های میدان $\vec{E}$ برای کاواک تشدید مکعبی به ضلع a برای مد TE_{101} عبارتند از:

$$a=b=c\ ,\ l=1\ ,\ m=0\ ,\ n=1$$

ج)

$$TE_{101}: \begin{cases} E_x=0 \\ E_y=E_2\sin(\frac{\pi}{a}x)\sin(\frac{\pi}{a}z)e^{-iwt} \\ E_z=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{E}_{101}=E_y\hat{j}$$

و اگر $\vec{H}$ را به صورت $H(r,t)=H(r)e^{-iwt}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \xrightarrow{H=H(r)e^{-iwt}} \vec{\nabla}\times\vec{E}=i\mu_0 w\vec{H}$$

$$\Rightarrow \vec{H}=\frac{-i}{\mu_0 w}\vec{\nabla}\times\vec{E}=\frac{-i}{\mu_0 w}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & Ey & 0 \end{vmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} H_x=(\frac{-i}{\mu_0 w})(\frac{-\pi}{a}E_2\sin(\frac{\pi}{a}x)\cos(\frac{\pi}{a}z)e^{-iwt} \\ H_y=0 \\ H_z=(\frac{-i}{\mu_0 w})(\frac{-\pi}{a}E_2\cos(\frac{\pi}{a}x)\sin(\frac{\pi}{a}z)e^{-iwt} \end{cases}$$

۱۸ - ۲۱ - ضرایب شکست برای شیشه صاف، شیشهٔ بلوری و الماس به ترتیب ۱٫۵۲، ۱٫۶۵ و ۱٫۴۲ است. (الف) برای امواج با قطبش s و p در فصل مشترک هوا با هر یک از مواد بالا، ضریب بازتاب R را محاسبه کنید. (ب) نمودارهایی مشابه شکل ۱۸-۳ ترسیم کنید. (ج) زاویهٔ بروستر را محاسبه کنید.

$$r_{12s}=\frac{n_1\cos\theta_1-n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2}\ ,\ r_{12p}=\frac{n_2\cos\theta_1-n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1+n_1\cos\theta_2}$$

$$R_s=r_{12s}^2\ ,\ R_p=r_{12p}^2$$

و با توجه به قانون اسنل خواهیم داشت:

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2 \Rightarrow \cos\theta_2=\sqrt{1-(\frac{n_1}{n_2})^2\sin^2\theta_1}\ ,\ n_1=1$$

$$R_s=\left[\frac{\cos\theta_1-n_2\sqrt{1-(\frac{1}{n^2})^2\sin^2\theta_1}}{\cos\theta_1+n_2\sqrt{1-(\frac{1}{n^2})^2\sin^2\theta_1}}\right]^2$$

$$=\left[\frac{\cos\theta_1-\sqrt{n_2^2-\sin^2\theta_1}}{\cos\theta_1+\sqrt{n_2^2-\sin^2\theta_1}}\right]^2$$

$$R_p=\left[\frac{n_2\cos\theta_1-\sqrt{1-(\frac{\sin^2\theta_1}{n_2^2})}}{n_2\cos\theta_1+\sqrt{1-(\frac{\sin^2\theta_1}{n_2^2})}}\right]^2$$

$$=\left[\frac{n_2^2\cos\theta_1-\sqrt{n_2^2-\sin^2\theta_1}}{n_2^2\cos\theta_1+\sqrt{n_2^2-\sin^2\theta_1}}\right]^2$$

$$\theta_B=\tan^{-1}\frac{n_2}{n_1}\ ,\ n_1=1$$

$$if\ n_2=1/52 \Rightarrow \theta_B=\tan^{-1}(1/52)=56/7^\circ$$

$$if\ n_2=1/65 \Rightarrow \theta_B=\tan^{-1}(1/65)=58/8^\circ$$

$$if\ n_2=2/42 \Rightarrow \theta_B=\tan^{-1}(2/42)=67/5^\circ$$

PowerEn.ir

۱۹

پاشندگی و میدان‌های نوسان‌کننده در محیط‌های پاشنده

اگر خروجی $Q(t)$ و ورودی $I(t)$ محیطی از طریق زیر به یکدیگر مرتبط باشند.

$$Q(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}R(t-t')I(t')dt' \qquad (1-19)$$

و تابع پاسخ $R(t)$ به $I(t)$ بستگی نداشته باشد، آن محیط خطی است. پاسخ این محیط علی است زیرا خروجی به آنچه در گذشته رخ داده است بستگی دارد ولی به آینده بستگی ندارد.

با درنظر گرفتن الکترون‌ها و یونها به صورت نوسانگرهای هماهنگ میرای کلاسیک یا به صورت ذرات آزاد، ثابت دی‌الکتریک مختلط ماده به عنوان تابعی از فرکانس میدان الکتریکی محاسبه می‌شود. نتیجه عبارت است از:

$$\hat{\mathbf{K}}-1=\frac{w_p^2}{w_0^2-w^2-i\gamma w} \qquad (2-19)$$

که در آن w_0 فرکانس طبیعی و γ فرکانس میرایی است و w_p (فرکانس پلاسما برای ذرات آزاد) برابر است با:

$$w_p=\sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}} \qquad (3-19)$$

بر مبنای این تحلیل انواع بستگیهای ثابت دی‌الکتریک حقیقی و رسانندگی را به فرکانس، بسته به آنکه نیروی لختی، یا نیروی میرایی، و یا نیروی بازگرداننده قابل چشم‌پوشی باشد، می‌توان فهرست‌بندی کرد. اگر اثرات میدان موضعی را بتوانیم نادیده بگیریم، پاسخهای دی‌الکتریکی گروه‌های مختلف ذرات جمع‌پذیرند. بستگی ثابت‌های دی‌الکتریک به فرکانس و همچنین اندازه‌های نسبی قسمتهای حقیقی و موهومی آن تعیین کننده بستگی ثابت‌های اپتیکی k,n به فرکانس است.

قسمت‌های حقیقی و موهومی از یکدیگر مستقل نیستند، بلکه از طریق روابط کرامرز-کرونیگ به یکدیگر مربوط می‌شوند.

هنگامی که نیروهای لختی و بازگرداننده غالب‌اند، جذب تشدیدی رخ می‌دهد. برای میرایی کم ثابت دی‌الکتریک شکل لورنتسی ساده‌ای دارد. اگر $\mathbf{K}_i$ کوچک باشد، ثابت‌های اپتیکی نیز به همان شکل خواهند بود. در هر صورت، در ناحیه قله جذب «پاشندگی بی‌هنجار» رخ می‌دهد. قله‌ها برای الکترونها در مرئی یا فرابنفش واقع‌اند و برای یونها در فرو سرخ.

چنانچه نیروی بازگرداننده (w_0) را برابر با صفر قرار دهیم نظریه الکترون آزاد درود نتیجه خواهد شد. هنگامی که $w<<\gamma$ باشد، عمق پوسته و ضریب جذب در فرکانس‌های کم (فرمول‌های هاگن-رونبز) با رسانندگی dc نتیجه می‌شود. برای $w>>\gamma$, $w>>w_p$ ذرات آزاد سهم کوچکی در رسانش یا جذب دارند. اگر $\gamma<<w_p$ باشد، ناحیه فرکانس بینابینی وجود دارد (برای فلزات در فروسرخ) که در آن ضریب جذب کم است (ضریب انعکاس زیاد)

$$A=\frac{2}{w_p\tau} \qquad (4-19)$$

که در آن λ_p طول موج پلاسما برای فلزات در فرابنفش و برای سایر پلاسماهای الکترونی متداول در فرکانسهایی بسیار پایین‌تر، قرار دارد.

در واهلش دی‌الکتریکی اثرات لختی قابل چشم‌پوشی‌اند. بستگی واهلش دی‌الکتریکی به فرکانس «تندمیرا» ست و ناحیه پاشندگی بهنجار برای آن وجود ندارد. ساز و کار آن همان ساز و کار قطبش‌پذیری سمتگیری دو قطبی‌های دائمی است.

رابطه کرامرز - کرونیگ

$$\mathbf{K}_1(w)-1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{w'\mathbf{K}_i(w')dw'}{w'^2-w^2} \qquad (5-19)$$

PowerEn.ir

بین قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع پاسخ دی‌الکتریک تنها به خطی بودن محیط (و به علیت) بستگی دارد. این رابطه یا صورت‌های دیگر آن در تمام دستگاه‌های خطی کاربردهای مفیدی دارد.

مسائل فصل نوزدهم

۱۹ - ۱ - چگالی و ضریب شکست بنزن مایع در $20^\circ C$ به ترتیب $0.879\,g/cm^3$ و ۱٫۵۰ (برای $\lambda = 589\,nm$) است. از معادلهٔ کلازیوس-موساتی، (الف) ضریب شکست بخار بنزن را در $20^\circ C$، که در آن فشار بخار برابر با ۰٫۱ اتمسفر است، (ب) همچنین در نقطهٔ جوش آن ($80^\circ C$) محاسبه کنید.

حل: از معادلهٔ کلاؤسیوس ـ موساتی داریم:

$$\alpha = \frac{3\varepsilon_0 (k-1)}{N(k+2)}$$

که در آن $k = n^2$ و N تعداد مولکول‌ها در واحد حجم است.

با ثابت در نظر گرفتن قطبش پذیری مولکولی، در دمای دیگر که چگالی مولکولی N' می‌شود داریم:

$$\frac{3\varepsilon_0 (k-1)}{N(k+2)} = \frac{3\varepsilon_0 (k'-1)}{N'(k'+2)} \qquad (1)$$

برای محاسبهٔ N و N' به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$N = \frac{\rho}{M} \;,\; M = \frac{m}{N_A} \Rightarrow N = \frac{\rho N_A}{m} \qquad (2)$$

چون بنزن دارای ۶ اتم کربن با جرم مولی ۱۲ و ۶ اتم هیدروژن با جرم مولی یک است، بنابراین جرم مولی بنزن برابر است با:

$$m = 6(12+1) = 78\left(\frac{gr}{mol}\right)$$

بنابراین جرم مولکولی آن به صورت زیر خواهیم بود:

$$M = \frac{m}{N_A} = \frac{78\left(\frac{gr}{mol}\right)}{6/02\times 10^{23}\left(\frac{\text{مولکول}}{mol}\right)} \approx 1/29\times 10^{-22}\left(\frac{gr}{\text{مولکول}}\right) \qquad (3)$$

$$(2),(3) \Rightarrow N = \frac{\rho N_A}{m} = \frac{0/879\times 10^6\left(\frac{gr}{m^3}\right)}{1/29\times 10^{-22}\left(\frac{gr}{\text{مولکول}}\right)} \approx 6/8\times 10^{27}\left(\frac{\text{مولکول}}{m^3}\right)$$

برای محاسبهٔ N'، چگالی مولکولی بخار بنزن:

$$PV = nRT \Rightarrow P = NK_BT \qquad (4)$$

$$P = 0/1\,atm = 0/1\times 10^5\,Pa \;,\; T = 20^\circ C + 273 = 293^\circ K$$

$$K_B = 1/38\times 10^{-23}$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطهٔ (۴) داریم:

$$N' = \frac{P}{k_BT} = \frac{0/1\times 10^5}{1/38\times 10^{-23}\times 293} = 2/47\times 10^{24}\left(\frac{\text{مولکول}}{m^3}\right) \qquad (5)$$

$$(1),(2),(5) \Rightarrow \frac{(1/5)^2-1}{6/8\times 10^{27}\,((1/5)^2+2)} = \frac{k'-1}{2/47\times 10^{24}\,(k'+2)}$$

$$\frac{k'-1}{k'+2} = 1/07\times 10^{-4} \Rightarrow k' = 1/0032 \Rightarrow n' = \sqrt{k'} = 1/0016$$

برای به دست آوردن ضریب شکست بنزن در نقطهٔ جوش (80°) مانند قبل عمل می‌کنیم:

$$P = N''k_BT \Rightarrow N'' = \frac{p}{k_BT} = \frac{0/1\times 10^5}{1/38\times 10^{-23}\times (353)} = 2/053\times 10^{24}$$

$$(1) \Rightarrow n'' = \sqrt{k''} = 1/0013$$

۱۹ - ۲ - نشان دهید که پهنای منحنی لورنتسی، معادلهٔ (۱۹-۵۶)، در ارتفاع نصف بیشینه γ است. همچنین نشان دهید که مساحت زیر منحنی برابر است با

$$\frac{\pi}{2}\frac{w_p^2}{w_0}$$

حل:

$$K_i = \frac{w_p^2}{w_0}\frac{\frac{\gamma}{4}}{(w_0-w)^2+(\frac{\gamma}{2})^2}$$

در بسامد تشدید، $w = w_0$، k_i ماکزیمم می‌شود، بنابراین:

$$(K_i)_{max} = \frac{w_p^2}{w_0\gamma} \Rightarrow K_i = \frac{(K_i)_{max}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{w_p^2}{w_0}\frac{\frac{\gamma}{4}}{(w_0-w)^2+(\frac{\gamma}{2})^2} = \frac{1}{2}\frac{w_p^2}{w_0}\frac{1}{\gamma}$$

$$\Rightarrow (w_0-w)^2 + \frac{\gamma^2}{4} = \frac{\gamma^2}{2} \Rightarrow (w_0-w)^2 = \frac{\gamma^2}{4}$$

$$\Rightarrow w_0 - w = \pm\frac{\gamma}{2} \Rightarrow w = w_0 \mp \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \Delta w = \gamma$$

$$K_i = \lim_{\gamma\Rightarrow 0}\frac{w_p^2\gamma w}{(w_0^2-w^2)^2+\gamma^2w^2} = \frac{w_p^2}{w}\lim_{\gamma\Rightarrow 0}\frac{\gamma}{(\frac{w_0^2-w^2}{w})^2+\gamma^2}$$

و

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\pi}\frac{1}{x^2+\varepsilon^2} = \delta(x)$$

بنابراین:

$$K_i = \frac{w_p^2}{w}\pi\,\delta\left(\frac{w_0^2-w^2}{w}\right) = \frac{w_p^2}{w}\frac{\pi}{2}\delta(w_0-w)$$

گام آخر در معادله بالا از این حقیقت نتیجه می‌شود که: $\delta\left(\frac{w_0^2-w^2}{w}\right)$ تنها در حوالی $w = w_0$ غیر صفر است و بنابراین به طور تقریبی می‌توان آن را به صورت $\delta(2\{w_0-w\})$ نوشت و با توجه به یکی از خواص مهم δ می‌توان نوشت: $\delta(2w) = \frac{1}{2}\delta(w)$.

PowerEn.ir

$$\int_0^\infty \mathbf{K}_i\, dw = \frac{w_p^2}{w}\,\frac{\pi}{2}$$

۱۹ - ۳ - ضریب شکست الماس در $\lambda = 5893\,A^\circ$ برابر است با ۲٫۴۱۷؛ فرض کنید ثابت دی‌الکتریک ساکن آن ۵٫۵۰ است. این داده‌ها را در مورد مدل ساده‌ای با تنها یک جذب به صورت تابع δ در λ_0 به کار ببرید و λ_0 را تعیین کنید.

حل:

$$\mathbf{K}_r(0) = \mathbf{K}_0 = 1 + \frac{w_p^2}{w_0}\ ,\quad \mathbf{K}_0 = 5/50 \Rightarrow w_p^2 = 4/5\, w_0^2$$

$$\mathbf{K}_r - 1 = \frac{w_p^2}{w_0^2 - w^2}\ ,\ \mathbf{K}_r = n^2,\ n = 2/417 \Rightarrow (2/417)^2 - 1 = \frac{4/5 w_0^2}{w_0^2 - w^2}$$

$$\Rightarrow 4/842(w_0^2 - w^2) = 4/5\, w_0^2 \Rightarrow 0/342\, w_0^2 = 4/842\, w^2$$

$$\Rightarrow \frac{w^2}{w_0^2} = \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} = 0/0763 \Rightarrow \frac{\lambda_0}{\lambda} \approx 0/266$$

$$\lambda = 5893\,^\circ A \Rightarrow \lambda_0 \approx 1567/54\,^\circ A$$

۱۹ - ۴ - فرمول کوشی را برای برآورد ضریب شکست گاز هیدروژن در شرایط متعارف برای طول موجهای ۴۰۰۰ و ۷۰۰۰ آنگستروم، به کار ببرید. فرض کنید که $\lambda = 1216\,A^\circ$ (خط α ی لیمان).

حل:

رابطه کوشی: $n - 1 \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_p}\right)^2\left[1 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2\right]$

برای گازها در فشارجو داریم:

$$\left(\frac{w_p}{w_0}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_p}\right)^2 \approx 10^{-3}$$

بنابراین:

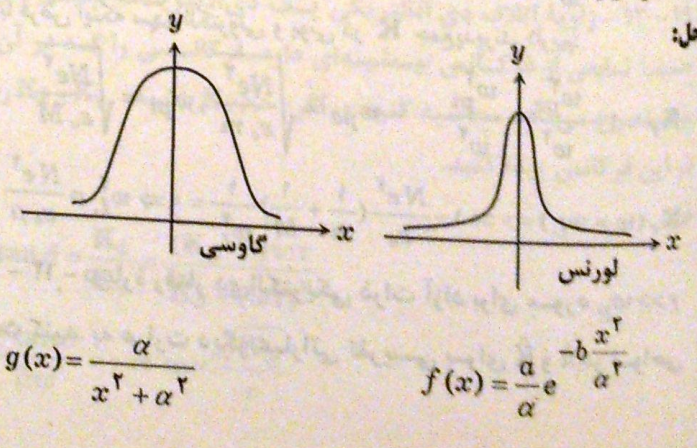
$$n - 1 \approx \frac{1}{2}\times 10^{-3}\left[1 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2\right],\ \lambda_0 = 1216\,^\circ A$$

$$n_1 - 1 \approx \frac{1}{2}\times 10^{-3}\left[1 + \left(\frac{1216}{4000}\right)^2\right] = 0/546\times 10^{-3} \Rightarrow n_1 = 1/000546$$

$$n_2 - 1 \approx \frac{1}{2}\times 10^{-3}\left[1 + \left(\frac{1216}{7000}\right)^2\right] = 0/515\times 10^{-3} \Rightarrow n_2 = 1/000515$$

۱۹ - ۵ - گاهی شکل قله‌های جذب تجربی به منحنی گاوسی و لورنتسی نزدیکتر است تا به منحنی لورنتسی. برای نشان دادن اختلاف بین منحنیهای گاوسی و لورنتسی، یک منحنی گاوسی و یک منحنی لورنتسی با ارتفاع قله یکسان در نصف ارتفاع بیشینه را در یک نمودار رسم کنید.

حل:



$$g(x) = \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} \qquad f(x) = \frac{a}{\alpha}e^{-b\frac{x^2}{\alpha^2}}$$

ارتفاع تابع g ، $\frac{1}{\alpha}$ است، بنابراین:

$$\frac{1}{2\alpha} = \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} \Rightarrow x^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 \Rightarrow x = \pm\alpha \Rightarrow \Delta x = 2\alpha$$

(ارتفاع یکسان): $\frac{1}{\alpha} = \frac{a}{\alpha} \Rightarrow a = 1$

$$x = \pm\alpha \Rightarrow f = \frac{1}{\alpha}e^{-b} = \frac{1}{2\alpha} \Rightarrow b = \ln 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\alpha}e^{-\ln 2\frac{x^2}{\alpha^2}}$$

$$\frac{1}{\alpha}e^{-\ln 2\frac{x^2}{\alpha^2}} = \frac{1}{2\alpha} \Rightarrow -\ln 2\left(\frac{x^2}{\alpha^2}\right) = -\ln 2 \Rightarrow x = \pm\alpha \Rightarrow \Delta x = 2\alpha$$

۱۹ - ۶ - تابع دی‌الکتریک را برای یونهای مقیدی که با میرایی قابل چشم‌پوشی در نوسان‌اند، می‌توان به صورت زیر نوشت

$$K(w) = K_\infty + \frac{w_p^2}{w_T^2 - w^2}$$

که در آن w_T فرکانس تشدید برای ارتعاشات عرضی یونها با طول موج بلند است، و K_∞ به طور تقریبی سهم آن دسته از حرکتهای الکترونی است که در فرکانسهایی بسیار بیشتر از w_T به تشدید در می‌آیند. توجه کنید که برای $w = w_T$، $K(w) \to \infty$. اگر برای $w = w_L$ داشته باشیم $K(w) = 0$، به طوری که نوسانهای طولی با طول موج بلندتر با فرکانس w_L بتوانند رخ بدهند، نشان دهید که

$$\frac{w_L^2}{w_T^2} = \frac{K_0}{K_\infty}$$

که در آن $K_0 = K(0)$ ثابت دی‌الکتریک dc است. این رابطه به رابطهٔ لیدن- ساکس-تلر معروف است.

حل:

$$\mathbf{K}(w) = \mathbf{K}_\infty + \frac{w_p^2}{w_T^2 - w^2}$$

$$\mathbf{K}(w = w_L) = 0 \Rightarrow 0 = \mathbf{K}_\infty + \frac{w_p^2}{w_T^2 - w_L^2} \Rightarrow \mathbf{K}_\infty = \frac{w_p^2}{w_L^2 - w_T^2} \quad (1)$$

$$\mathbf{K}(w = 0) = \mathbf{K}_0 \Rightarrow \mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_\infty + \frac{w_p^2}{w_T^2} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \mathbf{K}_0 = \frac{w_p^2}{w_L^2 - w_T^2} + \frac{w_p^2}{w_T^2} = \frac{w_T^2 w_p^2 + w_p^2(w_L^2 - w_T^2)}{w_T^2(w_L^2 - w_T^2)}$$

$$= \frac{w_p^2 w_L^2}{w_T^2(w_L^2 - w_T^2)} \quad (3)$$

$$(1),(3) \Rightarrow \frac{\mathbf{K}_0}{\mathbf{K}_\infty} = \frac{w_L^2}{w_T^2}$$

۱۹ - ۷ - فرض کنید یک محلول رقیق شامل تعداد N نوسانگر اتمی در واحد حجم است که در محیطی شفاف با ضریب شکست n_∞ حل شده‌اند. با فرض آنکه در فرکانس تشدید $K_i \ll 1$ و $n = n_\infty$ است، (الف) k و ضریب جذب (α) را پیدا کنید. از اثرات میدان موضعی چشم‌پوشی کنید. (ب) نشان دهید که

PowerEn.ir

$$N=\frac{\varepsilon_\circ mc}{e^2}n_\infty\gamma\alpha$$

از چنین رابطه‌ای (که به معادلهٔ اسماکولا یا معادلهٔ چاکو معروف است) غالباً برای پیدا کردن N از اندازه‌گیری‌های اپتیکی ارتفاع جذب α و پهنای جذب γ استفاده می‌شود.

حل:

$$\mathbf{K}_i\ll 1\Rightarrow k=\frac{\mathbf{K}_i}{2n},n=n_\infty\Rightarrow k=\frac{\mathbf{K}_i}{2n_\infty}\qquad(1)$$

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\hat{E}e^{-i(wt-\vec{\hat{k}}.\vec{r})}=\hat{E}e^{-\vec{k}_i.\vec{r}}\,e^{-i(wt-\vec{k}_r.\vec{r})}$$

$$\vec{\hat{k}}=(k_r+ik_i)\hat{u}=\hat{k}\hat{u},k_r=\frac{nw}{c},k_i=k\frac{w}{c},\hat{u}.\vec{r}=\xi$$

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\hat{E}e^{\frac{-kw\xi}{c}}e^{-iw(t-\frac{n\xi}{c})}\Rightarrow|\vec{E}|^2=|\hat{E}|^2e^{-2\frac{kw\xi}{c}}$$

$$\Rightarrow\alpha=\frac{2kw}{C}\qquad\text{(ضریب جذب)}\qquad(2)$$

در فرکانس تشدید، $w=w_\circ$، داریم:

$$\mathbf{K}_i=\frac{w_p^2}{w_\circ\gamma}\overset{(1)}{\Rightarrow}2n_\infty k=\frac{w_p^2}{w_\circ\gamma}\Rightarrow w_p^2=2n_\infty kw_\circ\gamma$$

$$,w_p^2=\frac{Ne^2}{\varepsilon_\circ m},(2)\Rightarrow N=\frac{\varepsilon_\circ mc}{e^2}n_\infty\gamma\alpha$$

۱۹ - ۸ - محیطی را در نظر بگیرید که حاوی ذرات آزادی با زمان برخورد τ است و رسانندگی dc آن برابر $g_\circ$ است. (الف) برای فرکانس $w=1/\tau$، قسمت‌های حقیقی و موهومی رسانندگی را محاسبه کنید. (ب) ثابت دی‌الکتریک حقیقی K چیست؟

حل: الف) برای محیطی که حاوی ذرات آزاد است ($w_\circ=\circ$) داریم:

$$\hat{\mathbf{K}}-1=\frac{-w_p^2}{w(w+i\gamma)},\mathbf{K}_r-1=-\frac{w_p^2}{w^2+\gamma^2},\mathbf{K}_i=\frac{w_p^2\gamma}{w(w^2+\gamma^2)}$$

$$\gamma=\frac{1}{\tau}$$

و برای رسانندگی داریم:

$$\hat{g}=-i\varepsilon_\circ w(\hat{\mathbf{K}}-1),\ g_r=\varepsilon_\circ w\mathbf{K}_i,g_i=-\varepsilon_\circ w(\mathbf{K}_r-1)$$

$$w=\frac{1}{\tau}\Rightarrow g_r=\varepsilon_\circ(\frac{1}{\tau})\frac{w_p^2\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau}((\frac{1}{\tau})^2+(\frac{1}{\tau})^2)}=\varepsilon_\circ w_p^2(\frac{\tau}{2})$$

$$g_i=+\varepsilon_\circ\frac{1}{\tau}\frac{w_p^2}{(\frac{1}{\tau})^2+(\frac{1}{\tau})^2}=\varepsilon_\circ w_p^2(\frac{\tau}{2})$$

ب)

$$k_r=1-\frac{w_p^2}{(\frac{1}{\tau})^2+(\frac{1}{\tau})^2}=1-\frac{w_p^2\tau^2}{2}$$

۱۹ - ۹ - برای یک پلاسمای الکترون آزاد با $\gamma/w_p=10^{-2}$، مقادیر تقریبی n و k را در $w=w_p$ محاسبه کنید.

حل:

$$\frac{\gamma}{w_p}=10^{-2},w=w_p$$

$$k_r-1=\frac{-w_p^2}{w^2+\gamma^2}=\frac{-w_p^2}{w_p^2+10^{-4}w_p^2}=\frac{-1}{1+10^{-4}}\approx-0/9999$$

$$k_i=\frac{w_p^2\gamma}{w(w^2+\gamma^2)}=\frac{w_p^2 10^{-2}w_p}{w_p(w_p^2+10^{-4}w_p^2)}=\frac{10^{-2}}{1+10^{-4}}\approx 9/999\times10^{-3}$$

$$\Rightarrow\mathbf{K}_i>>\mathbf{K}_r\Rightarrow n\approx k\approx\sqrt{\frac{\mathbf{K}_i}{2}}=0/071$$

۱۹ - ۱۰ - فرض کنید در تابع دی‌الکتریک یک پلاسمای الکترون آزاد با میرایی قابل چشمپوشی، سهم الکترونهای مقید مدارهای داخلی را که در فرکانسهای بالاتر به تشدید در می‌آیند بتوان به طور تقریبی با K_∞ برابر گرفت

$$K(w)=K_\infty-\frac{w_p^2}{w^2}$$

(الف) فرمولی برای فرکانس نوسانهای طولی پیدا کنید. (ب) در نقره مقدار محاسبه شده برای w_p از چگالی الکترون آزاد (ظرفیت) برابر است با $w_p=13/8\times10^{15}\,s^{-1}$ مشاهده می‌شوند. K_∞ چقدر است؟

حل:

$$k(w)=k_\infty-\frac{w_p^2}{w^2}$$

$$k(w=w_L)=\circ=k_\infty-\frac{w_p^2}{w_L^2}\Rightarrow k_\infty=\frac{w_p^2}{w_L^2}$$

$$w_p=13/8\times10^{15}\,s^{-1},w_L=5/8\times10^{15}\,s^{-1}$$

$$\Rightarrow k_\infty=(\frac{13/8}{5/8})^2=5/66$$

۱۹ - ۱۱ - دریک پلاسمای الکترون آزاد، امواج طولی پلاسما در فرکانس $w=\sqrt{Ne^2/\varepsilon_\circ m}$ تولید می‌شوند که در اینجا m جرم الکترون است. اگر یون‌های مثبتی با جرم M نیز آزادانه در حرکت باشند، با فرض آنکه سهم الکترونها و یونها در K جمع‌پذیرند، نشان دهید که امواج طولی پلاسما در فرکانس‌های $w=\sqrt{Ne^2/\varepsilon_\circ\mu}$ تولید می‌شوند. در اینجا $\mu=mM/(M+m)$ جرم کاهش یافته است.

حل:

$$\mathbf{K}_r=1-\frac{w_p^2}{w^2}$$

و با فرض اینکه سهم الکترونی و یونی در $\mathbf{K}$ جمع‌پذیرند، داریم:

$$\mathbf{K}_r=1-\frac{w_{pe}^2}{w^2}-\frac{w_{pi}^2}{w^2}\qquad w_{pe}=\sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_\circ m}},w_{pi}=\sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_\circ M}}$$

$$\mathbf{K}_r(w=w_L)=\circ\Rightarrow1-\frac{Ne^2}{\varepsilon_\circ}(\frac{1}{m}+\frac{1}{M})\frac{1}{w_L^2}=\circ\Rightarrow w_L^2=\frac{Ne^2}{\varepsilon_\circ\mu}$$

۱۹ - ۱۲ - دربارهٔ رفتار دی‌الکتریکی ذرات آزاد برای مورد $\gamma>>w_p$ بحث کنید. به عبارت دیگر عباراتی تقریبی برای $\hat{K}$ و $\hat{n}$ در نواحی

PowerEn.ir

مختلف فرکانس پیدا کنید. آیا رابطهٔ هاگن-روبنز معتبر است، و اگر معتبر است در چه گستره‌ای از فرکانس؟

حل:

$$\mathbf{K}_r - ۱ = \frac{-w_p^۲}{w^۲ + \gamma^۲} \quad , \quad \mathbf{K}_i = \frac{w_p^۲ \gamma}{w(w^۲ + \gamma^۲)}$$

الف)

$w << w_p << \gamma$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{K}_r - ۱ \approx \frac{-w_p^۲}{\gamma^۲} \Rightarrow \mathbf{K}_r \approx ۱ \\ \mathbf{K}_i \approx \frac{w_p^۲ \gamma}{w\gamma^۲} = \frac{w_p^۲}{w\gamma} \end{aligned}\right\}$$

$$n = \sqrt{\frac{۱}{۲}\left[\mathbf{K}_r + \sqrt{\mathbf{K}_r^۲ + \mathbf{K}_i^۲}\right]} = \sqrt{\frac{۱}{۲}\left[۱ + \sqrt{۱ + \frac{w_p^۴}{w^۲\gamma^۲}}\right]}$$

$$\Rightarrow$$

$$k = \sqrt{\frac{۱}{۲}\left[-\mathbf{K}_r + \sqrt{\mathbf{K}_r^۲ + \mathbf{K}_i^۲}\right]} = \sqrt{\frac{۱}{۲}\left[-۱ + \sqrt{۱ + \frac{w_p^۴}{w^۲\gamma^۲}}\right]}$$

ب)

$w_p << w << \gamma$:

$$\mathbf{K}_r - ۱ \approx -\frac{w_p^۲}{\gamma^۲} \Rightarrow \mathbf{K}_r \approx ۱$$

$$\mathbf{K}_i \approx \frac{w_p^۲ \gamma}{w\gamma^۲} = \frac{w_p^۲}{w\gamma} << ۱$$

چون $\mathbf{K}_r > ۰$ ، $\mathbf{K}_i << \mathbf{K}_r$ بنابراین:

$$n \approx \sqrt{\mathbf{K}_r} \qquad , k = \frac{\mathbf{K}_i}{۲n}$$

پ)

$w_p << \gamma << w$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{K}_r - ۱ \approx \frac{-w_p^۲}{w^۲} \Rightarrow \mathbf{K}_r \approx ۱ \\ \mathbf{K}_i \approx \frac{w_p^۲ \gamma}{w^۳} << ۱ \end{aligned}\right\} \Rightarrow n \approx \sqrt{\mathbf{K}_r} \, , k = \frac{\mathbf{K}_i}{۲n}$$

رابطه هاگن – رونبز وقتی صادق است که: $\mathbf{K}_i << \mathbf{K}_r$ ، باشد. ولی در هیچ یک از موارد بالا این حالت وجود ندارد، بنابراین رابطه هاگن – رونبز صادق نیست.

۱۹ - ۱۳ - زاویهٔ اتلاف دی الکتریکی یک دی‌الکتریک قطبی بر حسب تابعی از فرکانس بیشینه‌ای دارد. فرکانسی را که در آن بیشینه رخ می‌دهد محاسبه کنید و، اگر $K_۰ >> ۱$ باشد، K_r و K_i را در این فرکانس پیدا کنید.

حل:

$$\tan\theta = \frac{\mathbf{K}_i}{\mathbf{K}_r} = \frac{(\mathbf{K}_o - ۱)w\tau}{\mathbf{K}_o + (w\tau)^۲}$$

$$\frac{\partial \tan\theta}{\partial w} = ۰ \Rightarrow w = \frac{\sqrt{\mathbf{K}_o}}{\tau}$$

$\mathbf{K}r - ۱ = \frac{\mathbf{K}_o - ۱}{۱ + (w\tau)^۲}, \mathbf{K}_i = \frac{(\mathbf{K}_o - ۱)w\tau}{۱ + (w\tau)^۲}$: معادلات دبی

و با توجه به اینکه $\mathbf{K}_o >> ۱$ است، داریم:

$$\mathbf{K}r - ۱ = \frac{\mathbf{K}_o - ۱}{۱ + \mathbf{K}_o} \approx ۱ \, , \, \mathbf{K}_i = \frac{(\mathbf{K}_o - ۱)\sqrt{\mathbf{K}_o}}{۱ + \mathbf{K}_o} \approx \sqrt{\mathbf{K}_o}$$

۱۹ - ۱۴ - فرمولهای زیر را (که به قواعد جمع مشهورند) باری رسانندگی حقیقی g و پذیرفتاری χ با استفاده از روابط کرامرز-کرونیگ ثابت کنید.

$$\int_۰^\infty \chi(w')dw' = \frac{\pi}{۲} \lim_{w\to\infty} g(w) = ۰$$

$$\int_۰^\infty g(w')dw' = \frac{\pi}{۲} \lim_{w\to\infty} w^۲\chi(w) = \frac{\pi N e^۲}{۲m}$$

حل:

$$\hat{g} = -i\varepsilon_۰ w(\hat{\mathbf{K}} - ۱) \, , \, \hat{\mathbf{K}} = ۱ + \frac{\hat{x}}{\varepsilon_۰} \Rightarrow \hat{g} = -iw\hat{\chi}$$

$$\Rightarrow g_r = w\chi_i \, , \, g_i = -w\chi_r$$

و با توجه به روابط کرامرز – کردینگ داریم:

$$\chi_r(w) = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty \frac{w'\chi_i(w')dw'}{w'^۲ - w^۲}$$

$$\chi_i(w) = -(\frac{۲w}{\pi})\int_۰^\infty \frac{\chi_r(w')dw'}{w'^۲ - w^۲}$$

$$w\chi_i(w) = \frac{-۲w^۲}{\pi}\int_۰^\infty \frac{\chi_r(w')dw'}{w'^۲ - w^۲}$$

$$\frac{\pi}{۲}\lim_{w\to\infty} g_r(w) = \lim_{w\to\infty} -w^۲\int_۰^\infty \frac{\chi_r(w')dw'}{w'^۲ - w^۲}$$

$$= \lim_{w\to\infty} -w^۲\int_۰^\infty \frac{\chi_r(w')dw'}{-w^۲} = \int_۰^\infty \chi_r(w')dw'$$

و چون $w \to \infty \Rightarrow g_r \to ۰$ است، بنابراین:

$$\int_۰^\infty \chi(w')dw' = \frac{\pi}{۲}\lim_{w\to\infty} g(w) = ۰$$

$$\chi_r(w) = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty \frac{w'\chi_i(w')\,dw'}{w'^۲ - w^۲} \quad g_r = w\chi_i \quad \frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty \frac{g_r(w')dw'}{w'^۲ - w^۲}$$

$$\frac{\pi}{۲}\lim_{w\to\infty}\chi_r(w) = \lim_{w\to\infty}\int_۰^\infty \frac{g_r(w')dw'}{w'^۲ - w^۲} = \frac{-۱}{w^۲}\int_۰^\infty g_r(w')dw'$$

$$\int_۰^\infty g_r(w')dw' = -\frac{\pi}{۲}\lim_{w\to\infty} w^۲\chi_r(w)$$

$$\chi_r = \varepsilon_۰(\mathbf{K}_r - ۱), \mathbf{K}_r = ۱ + \frac{w_p^۲(w_۰^۲ - w^۲)}{(w_۰^۲ - w^۲)^۲ + (\gamma w)^۲}$$

$$\chi_r = \frac{\varepsilon_۰ w_p^۲(w_۰^۲ - w^۲)}{(w_۰^۲ - w^۲) + (\gamma w)^۲}$$

اگر $\gamma = ۰$ باشد، داریم:

$$-\frac{\pi}{۲}\lim_{w\to\infty} w^۲\frac{(-\varepsilon_۰ w_p^۲ w^۲)}{w^۴} = \frac{\pi}{۲}\varepsilon_۰ w_p^۲$$

$$w_p^۲ = \frac{N e^۲}{\varepsilon_۰ m} \Rightarrow \int_۰^\infty g(w')\,dw' = \frac{\pi}{۲}\frac{N e^۲}{m}$$

PowerEn.ir

۱۹ - ۱۵ - فرض کنید محیطی تنها با یک قلهٔ جذب صورت $\chi_i(w')=\pi/2\, w_0\,\chi_0\,\delta(w'-w_0)$ مشخص می‌شود. پاسخ $P(t)$ محیط را به میدان الکتریکی تپی زیر پیدا کنید.

$$E(t)=\frac{E_0}{w_0}\delta(t)$$

حل:

$$f(t')=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \chi_i(w')\sin(w't')\,dw' \qquad \chi_i(w')=\frac{\pi w_0\chi_0}{2}\delta(w'-w_0)$$

$$\Rightarrow f(t')=\chi_0 w_0\sin(w_0 t') \qquad (1)$$

$$(1),E(t)=\frac{E_0}{w_0}\delta(t),P(t)=\int_0^\infty f(t')E(t-t')\,dt'$$

$$\Rightarrow P(t)=\int_0^\infty \chi_0\, w_0\sin(w_0\, t')\frac{E_0}{w_0}\delta(t-t')\,dt'=\chi_0\, E_0\sin w_0\, t$$

۱۹ - ۱۶ - با در نظر گرفتن $J(t)$ به جای $P(t)$، نشان دهید که رسانندگی مختلط از روابط پاشندگی زیر تبعیت می‌کند

$$g_r(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w' g_i(w')dw'}{w'^2-w^2},\quad g_i(w)=-\frac{2}{\pi}w\int_0^\infty \frac{g_r(w')dw'}{w'^2-w^2}$$

این روابط نه تنها برای عایقها بلکه برای رساناها نیز معتبرند، زیرا $g(w)$ در $w=0$ تکنیکی ندارد.

(الف) با استفاده از رابطهٔ $\hat{g}=-iw\hat{\chi}$، این روابط پاشندگی را با معادله‌های (۱۹-۲۱) که در آن $\tilde{R}(w)\equiv\hat{\chi}(w)$ مقایسه کنید. (ب) "قواعد جمع" زیر را به دست آورید.

$$\int_0^\infty \chi(w')dw'=\frac{\pi}{2}g(0),\ \int_0^\infty g(w')dw'=\frac{\pi}{2}\frac{Ne^2}{m}$$

توجه کنید که این روابط با روابطی که در مسئلهٔ ۱۹-۱۴ برای عایقها $(g(0)=0)$ به دست آمد، سازگارند.

حل: با درنظر گرفتن $\vec{J}(t)$ به جای $P(t)$ و با توجه به $\vec{J}=g\vec{E}$، داریم:

$$E(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{E}(w)e^{-iwt}dw \qquad (1)$$

$$J(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(w)\hat{E}(w)e^{-iwt}\,dw \qquad (2)$$

$$(1),J(t)=\int_0^{+\infty} f(t')E(t-t')\,dt'$$

$$\Rightarrow J(t)=\int_0^\infty f(t')\,dt'\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{E}(w)e^{-iw(t-t')}dw$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{E}(w)e^{-iwt}\,dw\int_0^\infty f(t')e^{iwt'}dt' \qquad (3)$$

از مقایسه رابطه بدست آمده با رابطه (۲) داریم:

$$\hat{g}(w)=\int_0^\infty f(t')e^{iwt'}dt'\Rightarrow\begin{cases}g_r(w)=\int_0^\infty f(t')\cos(wt')dt' & (4)\\ g_i(w)=\int_0^\infty f(t')\sin wt'\,dt' & (5)\end{cases}$$

$f(t')$ را از روی تبدیل وارون یکی به‌دست آورده و در دیگری قرار داده و سپس روی t' انتگرال می‌گیریم:

$$(5)\Rightarrow f(t')=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty g_i(w')\sin(w't')\,dw' \qquad (6)$$

$$(4),(6)\Rightarrow g_r(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty g_i(w')\,dw'\int_0^\infty \cos(wt')\,Sin(w't')\,dt'$$

با انتگرال‌گیری روی t' داریم:

$$g_r(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w' g_i(w')}{w'^2-w^2}dw'$$

$$,g_i(w)=-(\frac{2w}{\pi})\int_0^\infty \frac{g_r(w')\,dw'}{w'^2-w^2} \qquad (7)$$

الف)

$$\hat{g}=-iw\hat{\chi}=-iw(\chi_r+i\chi_i)\Rightarrow g_r=w\chi_i,g_i=-w\chi_r$$

با جایگذاری در روابط بالا داریم:

$$w\chi_i=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w'(-w'\chi_r(w'))\,dw'}{w'^2-w^2}$$

$$-w\chi_r=\frac{-2w}{\pi}\int_0^\infty \frac{w'\chi_i(w')\,dw'}{w'^2-w^2}$$

از مقایسه این روابط با روابط زیر:

$$\chi_r(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w'\chi_i(w')\,dw'}{w'^2-w^2}$$

$$\chi_i(w)=\frac{-2w}{\pi}\int_0^\infty \frac{\chi_r(w')\,dw'}{w'^2-w^2}$$

بنابراین، فقط رابطه χ_2 سازگار است.

ب)

$$\hat{g}=-iw\hat{x}\Rightarrow g_r=w\chi_i,g_i=-w\chi_r$$

$$\overset{(7)}{\Rightarrow}\chi_r=\frac{g_i(w)}{-w}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{g_r(w')\,dw'}{w'^2-w^2}$$

$$\lim_{w\to\infty}\chi_r\approx\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{g(w')\,dw'}{-w^2}$$

$$\Rightarrow\frac{-\pi}{2}\lim w^2\chi_r(w)\approx\int_0^\infty g(w')dw'$$

مسئله (۱۹-۱۴):

$$-\frac{\pi}{2}\lim w^2\chi_r(w)=\frac{\pi}{2}\varepsilon_0 w_p^2\Rightarrow\int_0^\infty g(w')\,dw'=\frac{\pi Ne^2}{2m}$$

$$۷: g_r(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{w' g_i(w')\,dw'}{w'^2-w^2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{w'(-w'\chi_r(w'))\,dw'}{w'^2-w^2}$$

$$g_r(w=0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{-w'^2\chi_r(w')\,dw'}{w'^2}=\frac{-2}{\pi}\int_0^\infty\chi_r(w')\,dw'$$

$$\Rightarrow\int_0^\infty\chi(w')dw'=-\frac{\pi}{2}g(w=0)$$

PowerEn.ir